This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06911610 5

A. v. Vorstner

E. Schmidt starb zu Ende des Jahres 1832
nachdem er die Bohnenberger Stelle nach [illegible]
[illegible] war.

Lehrbuch

der

mathematischen

und

hysischen Geographie

von

Dr. J. C. Eduard Schmidt,

Privatdocent auf der Universität Göttingen.

Erster Theil.

Mathematische Geographie.

Mit 3 Kupfertafeln.

Göttingen,

bei Vandenhoeck und Ruprecht.

Vorrede.

Obgleich mehrere schätzbare Lehrbücher der mathematischen und physischen Geographie vorhanden sind, so schien es mir aus dem Grunde nicht überflüssig denselben ein neues hinzuzufügen, weil sie sich blos auf eine ganz elementare Darstellung der hierher gehörigen Gegenstände beschränken, die daher nothwendigerweise gewöhnlich sehr mager ausfallen mussten. Auch findet man in denselben meistentheils blos die Resultate, die durch die Bemühungen der Gelehrten gefunden sind, angegeben, ohne nähere Beschreibung der dabei angewendeten Mittel und Berechnungen, wodurch der Leser nicht in den Stand gesetzt wird, selbst etwas für die Erweiterung der geographischen Wissenschaften zu thun. Ich habe mich daher in vorliegendem Werke so viel als möglich bemüht, die in dieser Wissenschaft vorhandenen Resultate durch mathematische Theorien ausführlich zu entwickeln, und dem Leser Anleitung zu geben, dieselben durch eigene Beobachtungen und Bemerkungen zu erweitern. Mancher würde vielleicht

eine ausführlichere Theorie der perspectivischen Kartenprojectionen zweckmässig gefunden haben, allein ich wollte den Raum, um diesem Lehrbuche nicht einen zu grossen Umfang zu geben, lieber zu wichtigern und interessantern Untersuchungen aufsparen, da dieser Gegenstand in vielen andern Büchern, die sowohl von der Geographie als auch von der Perspective handeln, ausführlich aus einander gesetzt ist, um so mehr, da ich die nicht perspectivische Abbildungsart der Oberflächen, die auf einem weit richtigern Grundsatz beruht, und zu keiner Verzerrung des Bildes Anlass giebt, ausführlich genug dargestellt habe, um jeden aufmerksamen Leser in den Stand zu setzen, die allgemeine Theorie auf alle besondern Fälle anzuwenden.

Rücksichtlich der in den §§. 231—239. gegebenen Dimensionen des Erdsphäroïds, wird es mir erlaubt seyn, hier eine kleine Correction einzuschalten, die aus einer Abänderung der beiden ostindischen und der englischen Messung hervorgeht. Nach Kater's Angabe in den Philosophical Transactions 1821, der eine genaue Untersuchung der bei den erwähnten Messungen gebrauchten Maassstäbe veranstaltet hat, müssen nämlich die Längen der Bogen in Ostindien um 0,000018 vermindert, und die in England um 0,000007 vermehrt werden. Hierdurch werden die Gleichungen, welche die Grössen ω, Ω, ε enthalten

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega' \\
\omega'' &= \omega' + 0{,}56 + 5{,}70\,u + 25{,}51\,y \\
\Omega' &= \Omega' \\
\Omega'' &= \Omega' - 0{,}53 + 10{,}21\,u + 47{,}66\,y \\
\Omega''' &= \Omega' + 3{,}47 + 17{,}43\,u + 80{,}13\,y \\
\Omega^{IV} &= \Omega' - 1{,}35 + 24{,}98\,u + 113{,}63\,y
\end{aligned}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon$$
$$\varepsilon'' = \varepsilon' + 2{,}82 + 3{,}09\,u - 3{,}18\,y$$
$$\varepsilon''' = \varepsilon' + 4{,}89 + 4{,}41\,u - 4{,}68\,y$$
$$\varepsilon^{IV} = \varepsilon' + 3{,}72 + 5{,}78\,u - 6{,}34\,y$$
$$\varepsilon^{V} = \varepsilon' - 1{,}99 + 10{,}22\,u - 11{,}83\,y.$$

Setzt man diese an die Stelle der im Texte angegebenen, so erhält man für u, y die Fundamentalgleichungen

$$72''13 = 2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y$$
$$200{,}77 = 1763{,}16\,u + 9348{,}66\,y,$$

und hieraus die Abplattung $= \frac{1}{297{,}479}$, den 360sten Theil des Erdmeridians $= 57008{,}655$ Toisen. Die halbe grosse Axe wird $= 3271852{,}318$ Toisen, und die halbe kleine $= 3260853{,}703$ Toisen. Die Fehler, welche man bei den beobachteten Polhöhen voraussetzen muss, sind dann $\pi' = +1{,}79$; $\pi'' = -1{,}79$; $\omega' = -0{,}54$; $\omega'' = +0{,}55$; $\Omega' = -1{,}73$; $\Omega'' = -1{,}21$; $\Omega''' = +3{,}50$; $\Omega^{IV} = -0{,}57$; $\varphi' = +3{,}39$; $\varphi'' = +2{,}56$; $\varphi''' = +0{,}83$; $\varphi^{IV} = -4{,}15$; $\varphi^{V} = -1{,}01$; $\varphi^{VI} = -5{,}88$; $\varphi^{VII} = +0{,}36$; $\varphi^{VIII} = +3{,}88$; $\gamma' = -2{,}74$; $\gamma'' = +2{,}74$; $\varepsilon' = -1{,}88$; $\varepsilon'' = +0{,}95$; $\varepsilon''' = +3{,}01$; $\varepsilon^{IV} = +1{,}83$; $\varepsilon^{V} = -3{,}89$; $\sigma' = +1{,}33$; $\sigma'' = -1{,}33$. Der mittlere Fehler einer Bestimmung ergiebt sich $= 3''1403$, und die Gränzen der Genauigkeit, oder die mittlern zu befürchtenden Fehler in dem Nenner der Abplattung $= 10{,}5$ Einheiten, im 360sten Theile des Erdmeridians $= 4{,}26$ Toisen. In diesen Resultaten dürften vielleicht Struve's Messungen, sobald sie bekannt sind, noch einige Aenderungen hervorbringen.

In dem Abschnitte, welcher von der Bestimmung der geographischen Lage der Oerter handelt, habe

[redacted]

Inhaltsverzeichniss.

ɔn den Fixsternen. . . . . Seite 1

Die Erde wird im Mittelpunkte einer Kugel angenom-
auf deren Oberfläche sich die Sterne befinden. §. 2.
, Südpol, Parallelkreise, Aequator des Himmels. §. 3.
linie, Zenith, Nadir. §. 4. 5. Astronomischer Hori-
§. 6. Höhenkreis, Zenithdistanz, Verticalkreis. §. 7.
, Polardistanz, Declination. §. 8. Meridianebene,
linie, Himmelsgegenden. §. 9. 10. Stundenwinkel,
. §. 11—18. Formeln zur Berechnung der verschie-
n dem Vorigen vorkommenden Bogen und Winkel.

ɔn der Sonne. . . . . Seite 14

Die Sonne rückt von Westen nach Osten unter den
fort. §. 20. Ecliptik, Aequinoctialpunkte. §. 21.
on, rechtläufige und rückläufige Bewegung. §. 22—25.
er Ecliptik, grade Aufsteigung, Breite, Coluren.
30. Formeln zur Berechnung der graden Aufsteigung
Declination aus Länge und Breite, so wie auch um-
§. 31. Solstitialpunkte. §. 32. Eintheilung der
in Himmelszeichen. §. 33. Aenderung der Schiefe
liptik.

ɔn der Zeit. . . . . Seite 24

-39. Sternzeit, wahre Zeit, mittlere Zeit, Zeitgleichung.

ɔn der Bewegung der Erde. . . . Seite 27

41. Die Erde dreht sich um ihre Axe in einer Rich-
die der der Bewegung des Himmelsgewölbes entgegen-
ist. §. 42. Es wird gezeigt, dass die Erscheinungen
n sind, man mag annehmen die Erde drehe sich um
e, oder der Himmel bewege sich in entgegengesetzter
ıg um die stillstehende Erde. §. 43. Die Erde bewegt

sieh in einem Jahre um die Sonne. §. 44. 45. Beweis für die Bewegung der Erde aus dem Kepler'schen Gesetz zwischen den Umlaufszeiten und den Entfernungen, so wie aus der Aberration des Lichts §. 46 47. Dimensionen der Erdbahn und Umlaufszeit der Erde um die Sonne.

Von der Gestalt der Erde im Allgemeinen. S. 33

§. 48. 52. Meinungen der Alten über diesen Gegenstand. §. 53 — 57. Die Gestalt der Erde kann nicht sehr von der einer Kugel verschieden seyn. §. 58. Umschiffungen der Erde. §. 59. Geographische Breite und Länge; Aequator der Erde. Erdmeridiane. §. 60. Erdaxe, Mittelpunkt der Erde. §. 61. Geocentrische Breite eines Ortes der Oberfläche der Erde. §. 62. Oestliche und westliche Länge. §. 63 Meridiandifferenz. §. 64. Erster Meridian, Ursprung der Benennungen Länge und Breite. §. 65. Wendekreise, Polarkreise, Zonen. §. 66. Nebenwohner, Gegenwohner, Gegenfüssler.

Von den Tageszeiten und den Jahrszeiten. S. 45

§. 67. Aufgang und Untergang der Sonne. §. 68. Berechnung dieser Zeitpunkte. §. 69 — 75. Berücksichtigung der astronomischen Strahlenbrechung und der Aenderung der Declination der Sonne. §. 76. Der höchste Stand der Sonne über dem Horizont, findet nicht zur Zeit ihres Durchganges durch den Meridian statt. §. 77. Berechnung dieses Unterschiedes. §. 78. Berechnung der Morgen- und Abendweite. §. 79. Allgemeine Betrachtungen über die Verhältnisse der Tageslängen. §. 80. Die Climata der Alten. §. 81 — 87. Zeiten und Oerter wo die Sonne nicht auf- und untergeht. §. 88 — 98. Tropisches Jahr und Berechnung der Jahrszeiten.

Von der Dämmerung. . . . . Seite 70

§. 99. Morgendämmerung und Abenddämmerung. §. 100. Dauer der astronomischen und der bürgerlichen Dämmerung. §. 101. 102. Berechnung der Länge derselben. §. 103 — 105. Kleinste Dauer der Dämmerung für einen bestimmten Ort. §. 106. Näherungsformel zur Berechnung der Länge der Dämmerungszeit. §. 107. Immerwährende Dämmerung; Tabelle über die Dauer derselben von 50° bis 90° Breite.

Von den Darstellungen der Oberfläche der Erde, oder den geographischen Charten. . . . Seite 79

§. 108. 109. Perspectivische Projectionen, Erdglobus. §. 110. Orthographische, Stereographische und centrale Projectionen. §. 111 — 115. Darstellungsart und Berechnung dieser verschiedenen Projectionen. §. 116. Loxodromische Linie. §. 117 — 121. Gleichung derselben. §. 122. 123. Mercator's Projection. §. 124 — 204. Allgemeine Untersuchungen über die Darstellung der Oberflächen in Ebenen oder auf andern Oberflächen, nach dem Grundsatz, dass die Abbildung dem Object in den kleinsten Theilen ähnlich seyn soll.

Genauere Bestimmung der Grösse und Gestalt der Erde durch Gradmessungen. . . . . Seite 162

§. 205. Berechnung der Grösse der Erde wenn sie als eine Kugel angesehen wird. §. 206 — 215. Angabe der ältern Messungen der Griechen, Araber, Franzosen, Holländer und Engländer. §. 216. Newton und Huygens zeigten, dass die Erde an den Polen abgeplattet seyn müsse. §. 217. Erste Beobachtung der veränderlichen Länge des Pendels zu Cayenne im Jahre 1672. §. 218. Messung in Peru und in Lappland um den Streit zu schlichten: ob die Erde an den Polen abgeplattet oder verlängert ist, wie Cassini meinte. §. 219. Bedeutung der Abplattung der Erde. Formeln zur Berechnung der Abplattung und der Grösse der Erde aus zwei gemessenen Breitengraden. §. 220. Anwendung der Formel auf die lappländische und peruanische Messung. §. 221. 222. Darstellung der neuen Messungen. §. 223. Amplitude eines gemessenen Bogens. Abweichungen des Pendels von der Verticallinie, die wohl an allen Orten der Erde statt findet. §. 224. Aufsuchung der wahrscheinlichsten Gestalt der Erde aus den besten Messungen. Grundsatz, auf welchem dieselbe beruht. §. 225 — 230. Darstellung der zur Berechnung nothwendigen Formeln. §. 231 — 237. Numerische Aufstellung der Resultate. Bestimmung der Abplattung und des 360sten Theils des Erdmeridians. Abweichungen des Pendels von der Verticale, die man an den verschiedenen Orten wo die Polhöhen beobachtet worden, annehmen muss. §. 238. 239. Bestimmung der Gränzen der Genauigkeit in denen die berechnete Abplattung und der mittlere Erdgrad eingeschlossen sind. Polhöhen der Beobachtungsörter auf dem wahrscheinlichsten Erdsphäroïd. §. 240. Resultate die sich ergeben, wenn man die peruanische Messung ausschliesst. §. 241. 242. Länge des Erdquadranten. Umfang des Aequators. §. 243. Krümmungshalbmesser des Meridians. §. 244. Länge des Radius Vector. §. 245. Unterschied der geocentrischen und geographischen Breite. §. 246. 248. Oberfläche der Erde und einzelne Zonen. §. 249 — 261. Kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten auf dem Erdsphäroïd Sie ist mit der geodätischen Linie identisch. §. 262 — 267. Messungen von Längengraden. Formeln für dieselben. Anwendung derselben auf den zwischen Marennes und Padua gemessenen Bogen.

Theoretische Untersuchungen über die Gestalt der Erde. . . . . Seite 241

§. 268. 269. Man muss annehmen, die Erdkugel habe sich anfangs in einem flüssigen Zustande befunden. §. 270 — 272. Von der gegenseitigen Anziehung der Materie §. 273. Bestimmung der durch die Drehung entstehenden Centrifugalkraft. §. 274. 275. Huygens Methode die Abplattung der Erde zu bestimmen. §. 276 — 282. Anziehung eines homogenen elliptischen Sphäroïds auf einen Punkt im Innern desselben. §. 283 — 289. Entwickelung der Anziehung eines Ellipsoïds, welches drei verschiedene Axen hat. §. 290. Darstellung der Gleichung

der Oberfläche eines flüssigen Körpers, auf welchen gegebene Kräfte wirken. §. 291. Beweis, dass der Druck auf der Oberfläche senkrecht steht. §. 292. Bei der Bestimmung der Gestalt der Erdoberfläche kommen die gegenseitigen Anziehungen der Theile der Erde, und die Centrifugalkräfte als wirkende Kräfte in Betracht. Es ergiebt sich, dass die Gestalt eines elliptischen Sphäroïds der Gleichung für das Gleichgewicht der Flüssigkeit, wenn sie als homogen angenommen wird, Genüge leistet. §. 293. 294. Entwickelung des Ausdrucks der Schwere an der Oberfläche der Erde. §. 295 — 298. Bestimmung des numerischen Werthes der Abplattung und der Pendellänge. §. 299. Es giebt immer zwei elliptische Sphäroïde für das Gleichgewicht der Flüssigkeit, von denen das eine nur sehr wenig, das andere sehr stark abgeplattet ist. §. 200 — 302. Beweis, dass ausser diesen beiden kein anderes Sphäroïd gefunden werden kann. §. 303 — 320. Allgemeinere Untersuchungen über die Gestalt der Erde, unter der Annahme, dass die Dichtigkeit der Flüssigkeit nicht constant ist. §. 321 — 336. Betrachtung des Falles, wo die Schichten von gleicher Dichtigkeit ähnliche Oberflächen bilden, und die sonst feste Erde, mit einer sehr wenig tiefen Schicht von Wasser bedeckt ist. Berücksichtigt man nur die erste Potenz der Abplattung, so zeigt sich kein Unterschied zwischen der Gestalt der Oberfläche der Flüssigkeit und der eines elliptischen Sphäroïds. §. 337 — 348. Nimmt man die zweite Potenz der Abplattung mit in Rechnung, so ergiebt sich eine Abweichung der Gestalt der Oberfläche von der des elliptischen Sphäroïds. §. 349 — 354. Entwickelung des Gesetzes der Schwere an der Oberfläche der Erde; unter der angegebenen Voraussetzung. §. 355 — 361. Betrachtung des Falles, wo die ganze Erde als aus einer tropfbaren Flüssigkeit von ungleichförmiger Dichtigkeit bestehend angesehen wird. §. 362. 363. Wird blos die erste Potenz der Abplattung in Rechnung gezogen, so nimmt der Radius Vector der Erde, dem Quadrat des Sinus der Breite proportional, vom Aequator zum Pol ab, welches in so weit mit der Gestalt eines elliptischen Sphäroïds übereinstimmt; doch lässt sich die Grösse der Abplattung ohne die Annahme eines bestimmten Gesetzes der Dichtigkeit nicht weiter bestimmen. §. 364 — 368. Bestimmung des Gesetzes der Schwere an der Oberfläche der Erde. Es ergiebt sich der merkwürdige Satz, dass, wie auch die Dichtigkeit im Innern beschaffen seyn mag, die Summe der Zunahme der Schwere vom Aequator zum Pol und der Abplattung, immer das Fünfhalbfache des Verhältnisses der Schwungkraft zur Schwere am Aequator seyn muss, wenn man die Schwere am Aequator als Einheit annimmt. §. 369 — 377. Darstellung der Formeln die zur Bestimmung des zweiten Coefficienten der zweiten Potenz der Abplattung dienen. §. 378. Die dahin gehörigen Differentialgleichungen lassen sich zwar im Allgemeinen nicht integriren, allein es zeigt sich doch, dass sie mit der Gestalt eines elliptischen Sphäroïds nicht übereinstimmen. §. 379. Beweis, dass nur dann, wenn die Erde als aus einer gleichförmigen Flüssigkeit bestehend, betrachtet wird, dieselbe die Gestalt eines elliptischen Sphäroïds annimmt. §. 380 — 388. Be-

echnung des Zusammenhanges der Abplattung mit dem Gesetze der Dichtigkeit, aus den allgemeinen Differentialgleichungen, unter der Annahme eines besondern Gesetzes der Dichtigkeit. Es wird vorausgesetzt, dass das Verhältniss einer unendlich kleinen Zunahme des Drucks zu einer unendlich kleinen Zunahme der Dichtigkeit, der Dichtigkeit selbst proportional sey. Nimmt man die Abplattung $= \frac{1}{298}$, so ergiebt sich die mittlere Dichtigkeit des Erdkörpers gleich dem Doppelten der Dichtigkeit an der Oberfläche. §. 389 — 395. Bestimmung der Schwere von Körpern, die sich in geringen Entfernungen über und unter der Erdoberfläche befinden. Es zeigt sich, dass die Schwere im Innern der Erde nahe an der Oberfläche nicht nothwendig abnehmen muss, sondern sogar zunehmen kann.

Bestimmung der Abplattung der Erde durch die an den verschiedenen Oertern gemessenen Längen des Secundenpendels. . . . . Seite 365

§. 396. Erklärung der Zeit eines Pendelschwunges. §. 397—400. Berechnung der Zeit aus der Länge des Pendels, der Schwere, und der Amplitude der Schwingung. Zeit eines unendlich kleinen Schwunges. §. 401. Zusammenhang der Länge des Secundenpendels mit der Schwere, die dem Quadrat der geographischen Breite proportional vom Aequator nach dem Pol zunimmt. §. 402. 403. Aus den gemessenen Längen der Secundenpendel an zwei verschiedenen Orten auf der Erde, lässt sich die Schwere am Aequator, und die Abplattung der Erde berechnen. Numerisches Beispiel §. 404. Die Intensität der Schwere ist wegen localer Ungleichheiten nicht an allen Oertern, die gleiche Breite haben, dieselbe, wie es doch der Theorie nach statt finden sollte. §. 405 — 416. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Abplattung und der Schwere unter dem Aequator, aus den Pendelbeobachtungen von Sabine, Kater, Freycinet, Biot und Andern. Die Schwere ergiebt sich hiernach unter dem Aequator = 30,10906 par. Fuss. Die Abplattung $= \frac{1}{288{,}20}$, und die Gränzen zwischen denen sie enthalten seyn muss sind hiernach $\frac{1}{285}$ und $\frac{1}{291}$. §. 417. Es zeigt sich, dass an denjenigen Beobachtungsörtern, wo die Messung eine grössere Länge des Secundenpendels angiebt als sich aus den wahrscheinlichsten Bestimmungen ergiebt, die Oberfläche aus sehr dichten Materien besteht. §. 418. Die mittlere Dichtigkeit der Erde ergiebt sich nach dieser Abplattung = 4,785, wenn die des Wassers als Einheit angenommen wird. §. 419 — 423. Vergleichung der aus der wahrscheinlichsten Formel berechneten Pendellängen mit andern beobachteten. §. 424—426. Die Pendelmessungen welche auf der südlichen Halbkugel angestellt worden sind, geben eine grössere Abplattung als die auf der nördlichen. § 427 — 431. Methoden durch welche die Länge des Secundenpendels bestimmt wird. Borda'sche Beob-

schwungort, wo eine Platinakugel an einem Draht aufgehängt wird. §. 432. 433. Correction wegen der Amplitude der Schwingungsbogen. Sie nehmen in geometrischer Progression ab. §. 434. Der Widerstand der Luft hat keinen Einfluss auf die Dauer einer unendlich kleinen Schwingung. §. 435—437. Untersuchung der Wirkung der Ausdehnung des Fadens auf die Dauer der Schwingungen. §. 438. Anwendung der Theorie auf die Beobachtungen von Borda. §. 439—447. Theorie der Schwingungen des physischen Pendels. §. 448. Anwendung derselben auf das Borda'sche Pendel. §. 449. 450. Correction der Länge, um dieselbe auf den leeren Raum und das Niveau des Meeres zu reduciren. §. 451. Theoretische Untersuchung über die Correction welche angebracht werden muss, wenn man auf der Spitze eines Berges beobachtet. §. 452. Unveränderliches Pendel von Kater.

Von der Bestimmung der geographischen Lage des Ortes auf der Erde. . . . . Seite 438

§. 454. Die Bestimmungsstücke sind die geographische Breite, Länge, und die Höhe über dem Niveau des Meeres. Die letztere Bestimmungsart wird in die physische Geographie verschoben. §. 455—466. Bestimmung der Zeit aus correspondirenden Höhen der Sonne. §. 467—478. Zeitbestimmung aus Fixsternen. §. 479—486. Bestimmung der geographischen Breite. §. 487—490. Bestimmung der Länge durch Chronometer. §. 490. Durch Mondfinsternisse. §. 491—496. Berechnung der Mondfinsternisse. §. 497. Bestimmung der Länge durch die Verfinsterungen der Jupitestrabanten. §. 498. Durch Pulversignale. §. 499—501. Berechnung der Parallaxen, und Bestimmung der geographischen Länge durch die Beobachtungen von Sonnenfinsternissen. §. 511. Durch Sternbedeckungen. §. 512. Methode, die Länge durch Mondsdistanzen zu bestimmen. §. 513. Berechnung des wahren Abstandes des Mondes vom Stern oder

Mathematische Geographie.

ie mathematische Geographie hat zu ihrem Gegenıde die Bestimmung der Grösse und Gestalt der le, nebst ihrer Lage im Weltraume, so wie die ıtige Darstellung der auf der Erdoberfläche befindıen, merkwürdigern Punkte. Da alle diese Benmungen sich nicht ohne Beihülfe der astronomien Lehren machen lassen, so wird es nothwendig, s die zu diesem Behufe dienlichen Sätze aus der ronomie theils im Allgemeinen vorausgeschickt, ils im Einzelnen an den passenden Orten eingealtet werden. Wir gehen daher zuerst zu einer ·zen, allgemeinen Uebersicht der verschiedenen ıcheinungen über, die sich am Himmel zeigen.

Von den Fixsternen.

§. 1.

Man nimmt in der sphärischen Astronomie an, s die Sterne sich auf einer Kugel befinden, deren lbmesser als unendlich gross betrachtet wird, und deren Mittelpunkt sich die Erde befindet. Diese nahme wird durch den Anblick des gestirnten Himls gerechtfertigt, indem man nicht beurtheilen kann,

ob der eine Stern von uns entfernter sey als
dere, so dass man ihnen allen einerlei Ent
vom Beobachter beilegen darf. Da ferner di
achtungen, welche an verschiedenen Orten d
angestellt worden sind, gezeigt haben, dass
gemeinsame Lage der Sterne immer dieselbe bleib
mag sich auf der Erde befinden, wo man w
lässt sich daraus schliessen, dass jede Ent
[illegible] Punkte auf der Erde von einander ge
[illegible] des Sterns vom Beobachter, als un
[illegible] sey, und wir müssen uns dah
[illegible] der Kugel, von welcher die Er
[illegible] soll, als unendlich gro
[illegible]

§. 2.

[illegible] die Bewegung der Fixsterne an
[illegible] zeigen, dass diese Himme
[illegible] Stunden sich einmal mit
[illegible] um eine bestimmt
[illegible] auf dieser Kugel befi
[illegible] dieser Zeit einen Kreis besc
[illegible] weiter der sich bew
[illegible] entfernt
[illegible] die Hi
[illegible] und man nennt die
[illegible]

ngen reichen, gegen die im vorigen §. erwähnte immelsaxe in unveränderter Lage. Man nennt die- gerade Linie die Verticallinie, und wenn wir eselbe sowohl aufwärts als unterwärts uns verlän- rt denken, so bildet sie einen Durchmesser der immelskugel, welcher dieselbe in zwei Punkten ifft, von denen der über unserm Kopfe liegende, r Scheitelpunkt oder das Zenith, der unter s auf dem unsichtbaren Theile der Himmelskugel findliche, der Fusspunkt oder das Nadir ge- nnt wird.

§. 4.

Eine Linie, welche senkrecht auf die Verticalnie gezogen wird, heisst eine Horizontallinie, nd wenn man sich vorstellt, dass diese Verticallinie sich selbst herumgedreht wird, ohne dabei ihre age zu verändern, so beschreibt die Horizontallinie ei dieser Drehung eine Ebene, welche die Horizontalebene genannt wird. Verlängert man die lorizontalebene nach allen Seiten ins Unendliche, so ird dieselbe, da der Punkt, in welchem die Horintale auf die Verticale gesetzt wurde, im Mittelunkte der Himmelskugel liegt, die Himmelskugel in nem grössten Kreise schneiden, und dieser grösste reis bildet den astronomischen Horizont des rtes in welchem sich der Beobachter befindet. Die- r Horizont trifft wegen der Bewegung der Himelskugel immer andere Punkte derselben, allein ge- n die Weltaxe muss derselbe eben so wohl als die erticale eine feste Lage haben, da er selbst durch ne Ebene entsteht, die mit der Verticale auf eine nveränderliche Art verbunden ist.

§. 5.

Der astronomische Horizont muss wohl von dem heinbaren Horizont, oder dem gewöhnlichen Gechtskreise unterschieden werden, der sich durch die n Beobachter umgebenden Gegenstände bildet; nur dem Falle, wenn sich der Beobachter bis an die itte der Pupille des Auges in das Meer an einer elle eintauchte wo ringsherum kein Land zu sehen

wäre, würde der astronomische Horizont mit dem scheinbaren Horizont zusammenfallen, indem unsere Erfahrungen gelehrt haben, dass die durch einen mit einem schweren Körper versehenen Faden, einem sogenannten Pendel, gefundene Verticale mit der Oberfläche eines stillstehenden Wassers einen rechten Winkel bildet, und da die in der angegebenen Stellung des Beobachters aus seinem Auge gezogenen Gesichtslinien die Oberfläche des Wassers im Beobachtungsorte berühren, so machen sie mit der Verticale einen rechten Winkel, fallen daher auch mit der Horizontalebene zusammen.

Da der Horizont ein grösster Kreis ist, so wird er die Himmelskugel, eben so wie den Aequator, in zwei gleiche Theile zerlegen; wir übersehen daher immer zu gleicher Zeit die Hälfte der Himmelskugel.

§. 6.

Zieht man vom Orte des Beobachters aus, nach irgend einem Stern eine gerade Linie, welche die Gesichtslinie genannt wird, so bildet dieselbe mit der Ebene des Horizonts einen gewissen Winkel, der die Höhe des Sterns heisst, und sich wegen der Bewegung der Himmelskugel in jedem Augenblicke ändern muss. Alle Punkte welche gleiche Höhe über dem Horizont haben, liegen in einem Kreise dessen geometrischer Pol das Zenith ist; dieser Kreis heisst der Höhenkreis oder Almucantarac. Der Winkel, welchen die nach einem Stern gezogene Gesichtslinie mit der Verticallinie macht, führt den Namen der Zenithdistanz, und da die Horizontalebene mit der Verticallinie einen rechten Winkel bildet, so folgt, dass die Höhe und die Zenithdistanz zusammen 90° ausmachen müssen. Legt man durch das Zenith und den Stern einen grössten Kreis, so steht dieser senkrecht auf dem Horizont, und wird ein Verticalkreis genannt.

§. 7.

Die nach dem Pol des Himmels gezogene Gesichtslinie, welche mit der Weltaxe zusammenfällt

an kann dieselbe daher während einer nicht
en Zeit als eine beständige Grösse betrachten.

nkt man sich am Orte des Beobachters eine
enkrecht auf die Weltaxe gezogen, so be-
t dieselbe, indem die Weltaxe wie §. 4. die
llinie in sich herumgedreht wird, eine Ebene,
die Aequatorsebene genannt wird, da sie
die Himmelskugel verlängert, dieselbe im Ae-
schneiden muss. Die nach einem Stern gezo-
esichtslinie bildet mit der Ebene des Aequators
Winkel, welcher die Declination oder Ab-
ung des Sterns angiebt. Die Declination ei-
rns ist nördlich oder südlich, je nachdem die
m Stern gezogene Gesichtslinie vom Aequator
echnet, nach dem Nordpol oder dem Südpol
eicht. Aus dieser Erklärung der Declination
der Polardistanz verbunden, sieht man leicht,
e Polardistanz ± der Declination immer 90°
ht, je nachdem die Declination nördlich oder
ist. Gewöhnlich unterscheidet man die nörd-
nd südliche Declination durch + und —, und
nan dieses Vorzeichen mit berücksichtigt, so
an im Allgemeinen sagen, die Polardistanz +
clination giebt einen rechten Winkel. Legt
rch den Pol und einen Stern einen grössten
so macht dieser mit dem Aequator einen rech-
inkel, und wird ein Declinationskreis,
ch ein Stundenkreis genannt. Derjenige
l, welchen die Ebene des Aequators mit der
rizonts bildet, heisst die Aequatorshöhe,
ist so gross als der Winkel, welcher von der
llinie und der Weltaxe gebildet wird, da die-
en auf den besagten Ebenen senkrecht stehen.
ebt sich hieraus, dass die Aequatorhöhe und
höhe eines Ortes sich zu neunzig Grad ergän-
Zugleich ergiebt sich hieraus, dass der Winkel

der Verticallinie mit der Ebene des Aequators der Polhöhe gleich seyn muss.

§. 8.

Legt man durch die Verticallinie am Orte des Beobachters, und die nach dem Weltpol gezogene Gesichtslinie eine Ebene, so stellt diese die Meridianebene vor. Ihre Lage wird durch diese beiden Linien immer genau bestimmt seyn, da durch zwei sich schneidende Linien immer nur eine Ebene gelegt werden kann. Diese Ebene steht senkrecht auf der Horizontalebene, und sie schneidet die Himmelskugel in einem grössten Kreise, der durch die beiden Weltpole, das Zenith und das Nadir hindurchgeht. Dieser grösste Kreis wird der Meridian genannt. Der Durchschnitt der Meridianebene mit der Ebene des Horizonts macht die Mittagslinie aus, welche Linie den Horizont in zwei einander gegenüberliegenden Punkten trifft. Von diesen beiden Punkten heisst derjenige, welcher dem Nordpol am nächsten liegt, der Nordpunkt, der vom Nordpol entferntere der Südpunkt. Zieht man in der Horizontalebene durch den Ort des Beobachters senkrecht auf die Mittagslinie eine gerade Linie, so erhält man die Ost Westlinie, welche den Horizont ebenfalls in zwei Punkten schneidet. Ist man mit dem Gesicht nach Süden gewendet, so heisst der links liegende der Ostpunkt, der rechter Hand befindliche, der Westpunkt. Diese vier Punkte, Nordpunkt, Südpunkt, Ostpunkt und Westpunkt, theilen den Horizont in vier gleiche Theile deren jeder 90° enthält, und werden die Cardinalpunkte des Horizonts genannt. Die in ihrer Nähe liegenden Theile des Horizonts geben die Himmelsgegenden.

§. 9.

Nachdem die Erklärung der Himmelsgegenden gegeben worden, wird es leicht, die Richtung der Bewegung der Himmelskugel anzugeben. Ihre Drehung geschieht so, dass die zwischen dem Nordpol und dem südlichen Theile des Himmels befindlichen

terne eine von Osten nach Westen gerichtete Bewe-
ung haben, und man sagt daher, der Himmel dreht
ch in vier und zwanzig Stunden von Osten nach
Vesten einmal um die Erde herum. Die zwischen
em Nordpol und dem nördlichen Theile des Him-
els liegenden Sterne, müssen dieser Drehung gemäss
ine entgegengesetzte Bewegung von Westen nach
sten haben.

§. 10.

Der Winkel den der durch einen Stern gelegte
tundenkreis mit dem Meridian macht, heisst der
tundenwinkel, und derjenige Winkel welchen
er durch denselben Stern gelegte Verticalkreis mit
em Meridian bildet, wird das Azimuth genannt.
eide sowohl der Stundenwinkel als das Azimuth,
önnen entweder östlich oder westlich seyn, je nach-
em der Stundenkreis oder der Verticalkreis sich
uf der östlichen oder der westlichen Seite des Me-
idians befinden. Dass beide Winkel für einerlei
tern in einerlei Sinn liegen müssen, d. h. dass beide
ugleich östlich, oder beide zugleich westlich sind,
t von selbst einleuchtend.

§. 11.

Es sey (Fig. 1.) *HZRM* der östliche Theil, der
ber dem Horizont *HR* befindlichen Himmelskugel,
ZR der Meridian, *H* der Südpunkt, *R* der Nord-
unkt, *Z* das Zenith, in *P* der Nordpol, in *S* ein
tern, durch welchen die beiden Bogen *SZ* als Ver-
alkreis und *SP* als Declinations- oder Stundenkreis
legt sind, so ist

SP die Polardistanz
SZ die Zenithdistanz
RP die Polhöhe
ZPS der Stundenwinkel
HZM das Azimuth
ZSP der parallactische Winkel
MS die Höhe des Sterns.

Man hat dann den Regeln der sphärischen Trigo-
ometrie zufolge aus dem Dreieck *ZPS* die Gleichung
$\cos ZS = \cos ZP \cos SP + \sin ZP . \sin SP . \cos ZPS.$

Dann fällt der Stundenkreis des Sterns mit dem nördlichen Theile des Meridians zusammen, und der Stern muss wieder im Meridian unter dem Nordpol stehen. Man ist aber nicht im Stande bei allen Sternen diesen zweiten Durchgang durch den Meridian zu beobachten, da in diesem Falle

$$\cos ZS = \cos ZP . \cos SP - \sin ZP . \sin SP$$
$$= \cos(ZP + SP) \text{ also auch}$$
$$ZS = ZP + SP, \text{ wird. Ist nun}$$
$$ZP + SP > 90°,$$

so wird die Zenithdistanz des Sterns zu dieser Zeit grösser als 90°, und der Stern befindet sich unter dem Horizont. Allein wenn für einen gewissen Stern $ZP + SP$ kleiner als 90° ist, so kann man seinen Durchgang sowohl durch den südlichen als durch den nördlichen Theil des Meridians beobachten, und um beide Durchgänge von einander zu unterscheiden, nennt man den ersten die obere, den zweiten die untere Culmination.

Ist $ZP + PS = 90°$, so streift der Stern den nördlichen Horizont, und da $ZP = 90° -$ der Polhöhe, so wird dann $PS =$ der Polhöhe, folglich werden alle Sterne deren Polardistanz kleiner als die Polhöhe des Ortes der Beobachtung ist, sowohl in ihrer obern als in der untern Culmination beobachtet werden können.

§. 14.

Setzt man in der Formel (§. 11.)

$$\cos ZP = \cos ZP . \cos SP + \sin ZP . \sin SP . \cos ZPS.$$

den Bogen $ZS = 90°$, so wird

$$0 = \cos ZP . \cos SP + \sin ZP . \sin SP . \cos ZPS.$$

folglich

$$\cos ZPS = - \frac{\cos ZP . \cos SP .}{\sin ZP . \sin SP .}$$
$$= - \cot ZP . \cot SP.$$

Sobald $ZS = 90°$ ist, geht der Stern entweder auf oder unter, also giebt der durch die Gleichung

$$\cos ZPS = - \cot ZP . \cot SP.$$

gefundene Werth von ZPS den Stundenwinkel an, welcher bei Aufgang oder Untergang des Sterns statt

findet, und drückt man denselben in Zeit aus, so giebt dieser Werth den halben Tagebogen des Sterns an, d. h. die Zeit, welche von seinem Aufgange bis zu seiner Culmination, oder von der Culmination bis zum Untergange verfliesst.

§. 15.

Der Winkel ZP ist immer kleiner als 90°, der Winkel SP hingegen, kann kleiner und grösser als 90° seyn, je nachdem der Stern eine nördliche oder eine südliche Declination hat. So lange nun $SP < 90°$ wird $\cot SP$ positiv, also $\cos ZPS$ negativ, folglich $ZPS > 90°$, wenn aber $SP > 90°$, so wird $\cot SP$ negativ, und $\cos ZPS$ positiv, also $ZPS < 90°$. Hieraus ergiebt sich, dass für Sterne, welche eine nördliche Declination haben, der Stundenwinkel bei ihrem Aufgange oder Untergange grösser als 90° wird, bei Sternen hingegen, die eine südliche Declination besitzen, ist der Stundenwinkel kleiner als 90°. Steht ein Stern im Aequator, so ist für diesen, $SP = 90°$, also $\cot SP = 0$, dann wird $\cos ZPS = 0$, und $ZPS = 90°$; für einen solchen Stern ist also der Stundenwinkel beim Aufgange oder Untergange 90 Grad. Nimmt man SP kleiner als $90° - ZP$, so dass wenn e eine positive Grösse bedeutet

$$SP = 90° - ZP - e$$

so verwandelt sich die Formel

$$\cos ZPS = -\cot ZP.\cot SP \text{ in diese:}$$

$$\cos ZPS = -\cot ZP.\tang(ZP + e)$$

$$= -\frac{\tang(ZP + e)}{\tang ZP}.$$

Dieser Bruch ist grösser als die Einheit, folglich wird der Winkel ZPS unmöglich, und man muss hieraus schliessen, dass ein solcher Stern nicht auf- oder untergeht.

§. 16.

In einem sphärischen Dreiecke müssen bekanntlich immer drei Stücke gegeben seyn, um die drei übrigen zu berechnen, und wenn entweder zwei

Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite nebst den beiden anliegenden Winkeln gegeben sind, welche Fälle in der Astronomie am häufigsten vorkommen, so sind die vom Herrn Hofrath Gauss in der Theoria motus corporum coelestium angegebenen vier Formeln zur numerischen Berechnung die bequemsten. Bezeichnet man nämlich durch a, b, c die drei Seiten des sphärischen Dreiecks, durch A, B, C die diesen Seiten resp. gegenüberliegenden Winkel, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a.$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A = \cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a.$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a.$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A = \cos\tfrac{1}{2}(B+C).\cos\tfrac{1}{2}a.$$

Gesetzt z. B. es sey für einen Stern die Polardistanz $= p$, der Stundenwinkel $= s$, und die Polhöhe $= P$ gegeben, man sucht die Zenithdistanz z, das Azimuth α und den parallactischen Winkel ε, so ist im Dreieck ZPS (Fig. 1.)

$$ZP = 90° - p,\ SP = p,\ ZPS = s.$$
$$ZS = z,\ SZP = 180 - \alpha,\ ZSP = \varepsilon$$

also wenn man für b, SP, für c, ZP nimmt, so würde in den allgemeinen Formeln

$$a = z,\ b = p,\ c = 90 - p.$$
$$A = s,\ B = 180 - \alpha,\ C = \varepsilon$$

gesetzt werden müssen, und es wird

$$\sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right)\cos\tfrac{1}{2}s = \sin\left(90 - \frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)\sin\tfrac{1}{2}z$$
$$\sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right)\sin\tfrac{1}{2}s = \cos\left(90 - \frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)\sin\tfrac{1}{2}z$$
$$\cos\left(\frac{p+P}{2} - 45\right)\cos\tfrac{1}{2}s = \sin\left(90 - \frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)\cos\tfrac{1}{2}z$$
$$\cos\left(\frac{p-P}{2} - 45\right)\sin\tfrac{1}{2}s = \cos\left(90 - \frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)\cos\tfrac{1}{2}z$$

oder auch

1) $$\sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right)\cos\tfrac{1}{2}s = \cos\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.\ \sin\tfrac{1}{2}z$$

2) $$\sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right)\sin\tfrac{1}{2}s = \sin\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\ \sin\tfrac{1}{2}z$$

3) $\cos\left(\frac{p+P}{2} - 45\right) \cos \frac{1}{2} s = \cos \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \cos \frac{1}{2} z$

4) $\cos\left(\frac{p-P}{2} + 45\right) \sin \frac{1}{2} s = \sin \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \cos \frac{1}{2} z.$

§. 17.

Nun sey z. B. die Polhöhe des Ortes die von Göttingen = 51° 31′ 47″, der zu berechnende Stern die Wega, deren Polardistanz = 51° 22′ 19″, der Stundenwinkel = 67° 28′ 32″, so hat man

$$p = 51° 22′ 19″$$
$$P = 51° 31′ 47″$$
$$s = 67° 28′ 32″$$

folglich

$$\frac{p+P}{2} - 45 = 6° 27′ 3″$$
$$\frac{p-P}{2} + 45 = 44°. 50′. 32″$$
$$\frac{1}{2} s = 33°. 44′ 16″.$$

Dividirt man die zweite Gleichung (§. 16.) durch die erste, die vierte durch die dritte, so erhält man

$$\tang \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon) = \frac{\sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right)}{\sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right)} \cdot \tang \frac{1}{2} s$$

$$\tang \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon) = \frac{\cos\left(\frac{p-P}{2} + 45\right)}{\cos\left(\frac{p+P}{2} - 45\right)} \cdot \tang \frac{1}{2} s.$$

$$\sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right) = 9.8482857.$$
$$\tang \frac{1}{2} s = 9.8246921.$$
$$\text{Compl. } \sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right) = 0.9494247.$$
$$0.6224025 = \tang \frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)$$
$$\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon) = 76° 34′ 56″ 1.$$

$$\cos\left(\frac{p-P}{2}+45\right) = 9.8506776.$$
$$\tan g\,\tfrac{1}{2}s = 9.8246921.$$
$$\text{Compl. } \cos\left(\frac{p+P}{2}-45\right) = 0.0027584$$
$$9.6781281 = \tan g\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon) = 25^\circ\ 28'\ 52''1.$$

Hieraus ergiebt sich

das Azimuth $\alpha = 102^\circ\ 3'\ 48''\ 2.$

der parall. Winkel $\varepsilon = 51^\circ\ 6'\ 4''\ 0.$

Um die Zenithdistanz z zu berechnen, bediene man sich der zweiten Formel; diese giebt

$$\sin\left(\frac{p-P}{2}+45\right) = 9.8482857$$
$$\sin\tfrac{1}{2}s = 9.7446003.$$
$$\text{Compl. } \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon) = 0.0120192$$
$$9.6049052 = \sin\tfrac{1}{2}z$$
$$\tfrac{1}{2}z = 23^\circ\ 44'\ 33''\ 8.$$
$$z = 47^\circ.29'\ 7''\ 6.$$

§. 18.

Die Fixsterne behalten zwar genau genommen nicht immer völlig denselben gegenseitigen Abstand, indem er sich theils durch ihre eigene Bewegung, theils durch die scheinbaren Veränderungen ihrer Lage, die durch Refraction und Aberration hervorgebracht werden, bald vermehrt bald vermindert; allein alle diese Veränderungen sind sehr klein, dass sie nur durch feinere Beobachtungen ausgemittelt werden können. Anders verhält es sich bei der Sonne, dem Monde und den Planeten; diese verändern ihren Ort unter den Sternen sehr merklich, obgleich sie auch mit den Fixsternen an der täglichen Bewegung um die Erde Theil nehmen. Wir können hier keine ausführliche Theorie der Bewegung dieser Himmelskörper geben, sondern wir müssen uns blos auf das beschränken, was man für die mathematische Geographie zu wissen nothwendig hat, da jeder nach den vorhandenen Tafeln über die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten, den Ort dieser

Himmelskörper berechnen kann, ohne dass derselbe gezwungen ist, auf ihre eigentlichen sehr complicirten Bewegungsgesetze Rücksicht zu nehmen, um aus seinen Rechnungen Resultate für die mathematische Geographie ziehen zu können.

Von der Sonne.

§. 19.

Dass die Sonne unter den Sternen ihren Ort verändert, kann man leicht ohne alle Instrumente beobachten, indem man nur des Abends nach Sonnenuntergang auf die nahe beim westlichen Horizont befindlichen Sterne Achtung giebt, und sich ihre Stellung gegen den Horizont bemerkt; nach einiger Zeit wird man finden, dass dieselben Sterne bei Sonnenuntergang dem Horizont bedeutend näher gerückt sind, und nach einem noch längern Zeitraum gar unter dem Horizont verschwunden seyn werden. Man muss hieraus schliessen, dass die Sonne in dieser Zeit den östlicher liegenden Sternen näher gerückt ist, und man kann daher behaupten, dass die Sonne von Westen nach Osten unter den Sternen sich fortbewege. Wie nun aber die Bahn beschaffen sey, welche die Sonne an der Himmelskugel zu beschreiben scheint, muss durch genauere Beobachtungen ausgemittelt werden. Dass dieselbe kein Parallelkreis sey, sieht man aus den Gegenden des Horizonts, in welchen die Sonne auf- und untergeht, indem diese sich täglich ändern, bald näher nach Norden, bald näher nach Süden liegen, während die Fixsterne, welche Parallelkreise beschreiben, immer an demselben Orte des Himmels auf- und untergehen. Dasselbe kann man auch aus den verschiedenen Höhen schliessen, welche die Sonne bei ihrer Culmination erreicht, und die bald grösser bald kleiner sind.

§. 20.

Genauere Beobachtungen haben gelehrt, dass die Sonne vermöge ihrer von Westen nach Osten gehen-

den Bewegung einen grössten Kreis an der Himmelskugel zu beschreiben scheint, der die Ecliptik oder scheinbare Sonnenbahn genannt wird. Da dieser grösste Kreis nicht mit dem Aequator zusammenfällt, sondern einen gewissen Winkel mit demselben bildet der die Schiefe der Ecliptik heisst, und jetzt 23° 27′ 33″ beträgt, so folgt, dass die Ecliptik und der Aequator sich als grösste Kreise gegenseitig halbiren müssen. Die dabei sich bildenden zwei Durchschnittspunkte heissen die Aequinoctialpunkte, weil wenn die Sonne sich auf ihrer Bahn in einen dieser Punkte befindet, sie im Aequator steht, und dadurch Tag und Nacht auf der ganzen Erde gleich lang macht. In der einen Hälfte ihrer Bahn steht die Sonne nördlich vom Aequator, in der andern Hälfte südlich von demselben, so dass sie im erstern Falle eine nördliche, im letztern Falle eine südliche Declination hat. Derjenige Aequinoctialpunkt den sie trifft, indem sie aus der südlichen Hälfte ihrer Bahn in die nördliche übergeht, wird der Frühlingsaequinoctialpunkt, der gegenüberliegende, der Herbstaequinoctialpunkt genannt. In den ersten tritt sie am 21. März, in den zweiten am 23. September.

§. 21.

Obgleich diese beiden Durchschnittspunkte des Aequators und der Ecliptik nicht immer dieselbe Lage unter den Sternen behalten, sondern mit einer ziemlich gleichförmigen Geschwindigkeit von Osten nach Westen zu fortrücken, so kann man doch, da diese Bewegung bekannt und nur sehr gering ist, (in einem Jahr 50 Secunden) einen dieser beiden Punkte als einen festen Punkt betrachten, und durch dessen Beihülfe die Lage der übrigen Punkte der Himmelskugel bestimmen. Diese erwähnte Bewegung nennt man die Praecession, das Vorrücken der Tag und Nachtgleichen, oder das Zurückgehen der Aequinoctialpunkte, welche Benennungen sich durch die Erscheinungen, welche aus dieser Bewegung hervorgehen, rechtfertigen lassen. Der Name Praecession bezieht sich auf die Fixsterne, welche

rücksichtlich des Aequinoctialpunktes von Westen nach Osten fortzurücken scheinen; das Vorrücken der Tag und Nachtgleichen erklärt sich daraus, dass die Sonne früher wieder in diesen Durchschnittspunkt gelangt, als es ohne diese Bewegung geschehen wäre, da ihre Richtung der der Bewegung der Sonne entgegengesetzt ist. Dass man diese Bewegung auch das Zürückgehen der Aequinoctialpunkte nennt, rührt von einem Gebrauch in der Astronomie her, dem zufolge jede von Osten nach Westen gehende Bewegung, eine retrograde oder rückläufige, und jede Bewegung von Westen nach Osten eine directe oder rechtläufige genannt wird.

§. 22.

Es sey (Fig. 2.) *QEAC* der Aequator, in *P* der Nordpol, *EFC* der über dem Aequator liegende Theil der Ecliptik, so werden *E* und *C* die beiden Durchschnittspunkte oder die Aequinoctialpunkte seyn, und zwar stelle *E* denjenigen vor, in welchen die Sonne tritt, wenn sie über den Aequator heraufsteigt, also den Frühlingsaequinoctialpunkt; der gegenüberliegende *C* wird dann der Herbstaequinoctialpunkt seyn. *R* sey derjenige Punkt des nördlichen Himmels, welcher von allen Punkten der Ecliptik 90° entfernt liegt; man nennt denselben den Nordpol der Ecliptik. Der auf der südlichen Halbkugel diesem grade entgegengesetzte Punkt heisst der Südpol der Ecliptik, und aus der Geometrie ist bekannt, dass der Abstand des nördlichen Weltpols vom Nordpol der Ecliptik grade so gross seyn muss, als der Winkel, den der Aequator mit der Ecliptik bildet, d. h. er ist der Schiefe der Ecliptik gleich.

§. 23.

Legt man durch den Nordpol des Aequators *E* und einen der beiden Punkte *E* oder *C* einen Declinationskreis, *PE* oder *PC*, so kann man einen derselben als den ersten annehmen, und die Lage aller übrigen Declinationskreise gegen denselben durch den Winkel am Nordpol bestimmen. Es ist nun an

ectascension oder gerade Aufsteigung
erns genannt. Dieser Winkel ist mit dem Bo-
D des Aequators, der durch den Declinations-
des Sterns auf dem Aequator vom Frühlings-
noctialpunkt aus abgeschnitten wird, gleichgel-
daher man auch diesen die Rectascension nennt.
ndet man die gerade Aufsteigung *ED* mit der
früher erklärten Declination *SD* des Sterns,
rd durch diese beiden Bogen die Lage des Sterns
timmt. Der Winkel oder Bogen welcher die
e Aufsteigung angiebt, wird immer von Westen
Osten von Null bis 360° fortgezählt, so dass ein
ier liegender Stern eine grössere gerade Auf-
ng hat als ein mehr westlich gelegener, voraus-
t, dass das Frühlingsaequinoctium nicht zwi-
beide zu liegen kommt. Der erste Declina-
reis, der verlängert durch den Punkt *C* geht,
der Colur der Aequinoctien.

§. 24.

s giebt noch eine zweite Methode, den Ort ei-
terns an der Himmelskugel zu bestimmen, die
ältern Astronomie gebräuchlicher war, als die
de der Bestimmung durch die gerade Aufstei-
und die Declination. Legt man nämlich durch
einen Punkt *S* des Himmels und den Nordpol
Ecliptik einen grössten Kreis *KS* der die Eclip-
L trifft, so heisst dieser ein Breitenkreis,

geltend mit dem auf der Ecliptik abgeschnittenen Bogen *EL*. Es bestimmt sich daher der Ort eines Sterns eben so wohl durch seine Länge und Breite, als durch die gerade Aufsteigung und Declination. Uebrigens rechnet man auch den Winkel oder den Bogen welcher die Länge angiebt von Westen nach Osten, und die Breite wird nördlich oder südlich genannt, je nachdem der Stern auf der Seite der Ecliptik liegt, wo sich der Nordpol derselben befindet, oder auf der entgegengesetzten, und zur Unterscheidung der nördlichen und südlichen Breite bedient man sich ebenfalls der Zeichen + und —, wie bei der Declination.

§ 25.

Da die Fixsterne in einem guten Fernrohr als mittheilbare Punkte erscheinen, so ist, wenn ihre Lage durch die vorigen Bestimmungsstücke angegeben wird, kein Zweifel mehr übrig, welcher Theil des Sterns als bestimmt angenommen ist. Anders verhält es sich bei der Sonne, dem Monde und den Planeten, von welchen die ersten beiden schon dem blossen Auge, und die letztern wenigstens durch Fernröhre, die doch in unsern Zeiten immer bei den Beobachtungen angewandt werden, als Scheiben erscheinen,

durch dieselben zu gleicher Zeit einen in vielen Fällen überflüssigen Winkel erhält, nämlich denjenigen, welchen der Breitenkreis mit dem Declinationskreise am Stern macht. Dieser Winkel wird wohl auch der Positionswinkel genannt, doch ist dieser Ausdruck bei der Sonne gebräuchlicher als bei Sternen. Man setze

die Rectascension $= \alpha$
die Declination $= \delta$
die Schiefe der Ecliptik $= \varepsilon$
die Länge $= \lambda$
die Breite $= 6$
den Posit. Winkel $= \varphi$.

so hat man im Dreiek PSR (Fig. 2.), da der Bogen PR der Schiefe der Ecliptik gleich ist (§. 22.)

$$SR = 90° - 6$$
$$PR = \varepsilon$$
$$PS = 90° - \delta.$$
$$SPR = 90° + \alpha.$$
$$PSR = \varphi$$
$$PRS = 90° - \lambda.$$

und wenn man PR für b, PS für c annimmt, so hat man aus den allgemeinen Formeln (§. 16.)

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta - 90)\cos(45 + \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \lambda - 90)\sin(45 - \tfrac{1}{2}6)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta + 90)\sin(45 + \tfrac{1}{2}\alpha) = \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \lambda - 90)\sin(45 - \tfrac{1}{2}6)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta - 90)\cos(45 + \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + 90 - \lambda)\cos(45 - \tfrac{1}{2}6)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta + 90)\sin(45 + \tfrac{1}{2}\alpha) = \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + 90 - \lambda)\cos(45 - \tfrac{1}{2}6).$$

§. 27.

Der zu berechnende Stern sey die Capella, so hat man für diesen

$$\alpha = 57° 51' 7''$$
$$\delta = +45° 48' 8''$$
$$\varepsilon = 23° 27' 33''$$

folglich auch

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta - 90) = -10° 22' 9'' 5.$$
$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta + 90) = +33° 49' 42'' 5$$
$$45 + \tfrac{1}{2}\alpha = +82° 55' 33'' 5.$$

Man hat nun aus den angegebenen vier Gleichungen des vorigen Paragraphs, diese

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta+90)}\cdot\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) = \tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\lambda-90)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90)}\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) = \tang\tfrac{1}{2}(\varphi+90-\lambda)$$

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90) &= 9.2552537\,n\\
\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) &= 9.0937587\\
\text{Compl. } \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90) &= 0.2543722\\
&\quad\overline{8.6033846\,n}\\
\tfrac{1}{2}(\varphi+\lambda-90) &= 357^\circ\ 42'\ 8''\ 6\\
\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90) &= 9.9928485\\
\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) &= 9.0937587\\
\text{Compl. } \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90) &= 0.0805516\\
&\quad\overline{9.1671588}\\
\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda+90) &= 8^\circ\ 21'.\ 34''\ 5
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Werthen ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\varphi &= 6^\circ\ 3'\ 43''\ 1\\
\lambda-90 &= 349^\circ\ 20'\ 34''\ 1\\
\lambda &= 79^\circ\ 20'\ 34'\ 1
\end{aligned}$$

Man hat dann noch aus der zweiten der Formeln des vorhergehenden Paragraphs

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90) &= 9.7456278\\
\sin(45+\tfrac{1}{2}\alpha) &= 9.9966814\\
\text{Compl. } \cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\lambda-90) &= 0.0003493\\
&\quad\overline{9.7426585}\\
45-\tfrac{1}{2}\delta &= 33^\circ\ 34'\ 2''\ 1.\\
\delta &= +22^\circ\ 51'\ 55''\ 8.
\end{aligned}$$

§. 28.

Zur Prüfung der numerischen Rechnung kann man sich der Formel

$$\cos\alpha\,\cos\delta = \cos\vartheta\,\cos\lambda.$$

bedienen, die sich entweder aus den Dreiecken *DSE*, *LSE*, oder aus der Combination der vier Formeln §. 26. herleiten lässt. Man hat nämlich (Fig. 2.)

$\cos DE . \cos DS = \cos ES,$
$\cos LE . \cos LS = \cos ES$ folglich
$\cos DE . \cos DS = \cos LE . \cos LS$
oder da $DE = \alpha$, $DS = \delta$, $LE = \lambda$, $LS = 6$,
so wird $\cos \alpha . \cos \delta = \cos \lambda . \cos 6$.

Aus den Formeln des §. 26. findet man dasselbe wenn man die erste mit der vierten, die zweite mit der dritten multiplicirt, und das letzte Product vom ersten abzieht. Man hat in dem hier berechneten Beispiel

$\cos \alpha = 9.3881516$
$\cos \delta = 9.8433183.$
$9.2314699.$
$\cos \lambda = 9.2670131$
$\cos 6 = 9.9644574$
$9.2314705.$

Der geringe Unterschied rührt daher, dass wir nur auf Zehntheil einer Secunde gerechnet haben.

§. 29.

Um die umgekehrte Aufgabe aufzulösen, nämlich aus der Länge und Breite des Sterns die Rectascension und Declination zu finden, hat man nur nöthig in den Formeln (§. 26.) statt $90 - \delta$, $90 - 6$, und statt $90 + \alpha$, $90 - \lambda$ zu setzen. Hierdurch erhält man:

$\sin \frac{1}{2} (\varepsilon + 90 - 6) \cos (45 - \frac{1}{2} \lambda)$
$= \sin \frac{1}{2} (\varphi - \alpha - 90) \sin (45 - \frac{1}{2} \delta)$
$\sin \frac{1}{2} (\varepsilon - 90 + 6) \sin (45 - \frac{1}{2} \lambda)$
$= \cos \frac{1}{2} (\varphi - \alpha - 90) \sin (45 - \frac{1}{2} \delta)$
$\cos \frac{1}{2} (\varepsilon + 90 - 6) \cos (45 - \frac{1}{2} \lambda)$
$= \sin \frac{1}{2} (\varphi + \alpha + 90) \cos (45 - \frac{1}{2} \delta)$
$\cos \frac{1}{2} (\varepsilon - 90 + 6) \sin (45 - \frac{1}{2} \lambda)$
$= \cos \frac{1}{2} (\varphi + \alpha + 90) \cos (45 - \frac{1}{2} \delta)$

§. 30.

In dem Fall, wo die Breite Null ist, lassen sich zur Berechnung der Rectascension und Declination, aus der Länge und der Schiefe der Ecliptik, ein-

[illegible] Dreieck [illegible], obgleich man sich auch [illegible] die Aufgabe [illegible] auflösen könnte, indem man [illegible]

Wäre [illegible] ein Dreieck *DNE* (Fig. [illegible] wenn [illegible] der [illegible] Punkt ist,

$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} = a$$
$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} = a \text{ folglich}$$
$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]}$$

[illegible]

Wenn die Bogen [illegible] = [illegible] sind, sieht man [illegible]

$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} = 1$$
$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} = -x$$
$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} = 1$$
$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} = -x$$

[illegible] Bogen [illegible] die Länge der Sonne 90° [illegible] [illegible] [illegible]

ler Bogen, hat man noch eine zweite Art die Län-
anzugeben. Man theilt nämlich die ganze Ecliptik
zwölf gleiche Theile, welche Himmelszeichen
nannt werden, und von denen ein jeder 30° ent-
ilt. Der Anfang der Theilung findet gleichfalls im
rühlingsaequinoctialpunkt statt.

Die Namen dieser Himmelszeichen sind der Reihe
ich folgende: Widder (♈), Stier (♉), Zwillinge (♊),
rebs (♋), Löwe (♌), Jungfrau (♍), Waage (♎),
corpion (♏), Schütze (♐), Steinbock (♑), Wasser-
ann (♒), Fische (♓), und um ihre Reihenfolge bes-
r zu behalten, hat man dieselben in folgenden Vers
bracht:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora,
Pisces.

Man giebt nun entweder die Länge durch die
nzahl der Grade an, oder durch die Charakteristik
s Himmelszeichens, oder durch die Stellenzahl des-
lben, wo bei der letztern Beziehungsart, der Wid-
r die Stellenzahl Null erhält. So kann man z. B.
itt 78° Länge auch 18° ♊, oder 2ᶻ 18° sagen.

Die vier Hauptpunkte der Ecliptik
Frühlingsaequinoctialpunkt,
Sommersolstitialpunkt,
Herbstaequinoctialpunkt,
Wintersolstitialpunkt
erden auch nach den mit ihnen zusammenfallenden
nfangspunkten der Himmelszeichen,
Nullpunkt des Widders (0°♈),
Nullpunkt des Krebses (0°♋)
Nullpunkt der Waage (0°♎),
Nullpunkt des Steinbocks (0°♑)
nannt, und die Wendekreise werden durch die Be-
nnungen Wendekreis des Krebses und Wen-
ekreis des Steinbocks unterschieden.

§. 33.

Die Schiefe der Ecliptik behält nicht immer ei-
rlei Werth, der freilich nur sehr langsam sich
ndert, aber doch noch längern Zeitraum merklich
m jetzigen verschieden ist. Im Jahre 1800 betrug

die Schiefe der Ecliptik 23° 27′ 57″, und sie nimmt jährlich um 0″521 ab, so dass im Jahre 1829 die Schiefe 15″ weniger 23° 27′ 42″ beträgt. Diesen Werth der durch die Subtraction der Säcularänderung gefunden ist, nennt man die mittlere Schiefe, es muss aber an demselben eine zweite Correction angebracht werden, die von der Lage der Sonne und der Mondsbahn abhängt, um die wahre Schiefe zu erhalten. Die hierzu nöthigen Formeln werden späterhin angegeben werden, wenn von den Methoden die Schiefe der Ecliptik zu bestimmen, die Rede seyn wird.

Von der Zeit.

§. 34.

Ein jedes Zeitmaass beruht auf der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung, es mag diese Bewegung eine wirkliche oder blos eine scheinbare seyn, und wenn man einen Körper kennt, bei dem eine solche gleichförmige Geschwindigkeit vorausgesetzt werden kann, so lässt sich dessen Bewegung zur Bestimmung der Zeit anwenden, indem wir schliessen, dass wenn der Körper gleiche Räume durchlaufen hat, die entweder durch Längenmaass oder Winkel gemessen werden, auch die während den verflossenen Zeiten einander gleich sind. Die gleichförmigste Bewegung die wir kennen, ist die Umdrehung der Erde, oder die aus derselben in entgegengesetzter Richtung hervorgehende Umdrehung des Himmels. Wählt man daher irgend einen Stern, dessen Bewegung zum Zeitmaasse dienen soll, so wird die Zeit, welche von einer Culmination desselben bis zur nächst folgenden verstreicht, einen bestimmten Zeitabschnitt, der bis auf sehr kleine Unterschiede, die man bestimmen kann, immer von einerlei Länge bleibt, ausmachen, und man nennt einen solchen durch auf einander folgende Culminationen bestimmten Zeitabschnitt, einen Tag. Die Unterabtheilungen desselben lassen sich durch die verschiedenen Stundenwinkel, die der Zeit proportional sind, ausmitteln. Da der Tag in 24

getheilt wird, so werden die westlichen
inkel von 15, 30, 45 u. s. w. Graden, den
on einer, zwei, drei u. s. w. Stunden an-

§. 35.

würde also genöthigt seyn, um die Zeit zu
zu welcher sich irgend eine Himmelsbege-
ıträgt, jedesmal zugleich den Stundenwinkel
ılten Sterns, durch Höhe und Azimuth zu
n, und dieses musste auch wirklich von den
bachtern vor der Erfindung der Uhren ge-
seitdem wir aber dieses für die beobachten-
ıomie so vortheilhafte Instrument in der
ıenheit, zu welcher es durch die Bemühun-
berühmtesten Mechaniker in unsern Zeiten
ıt, besitzen, ist dasselbe an die Stelle des
treten, und braucht nur zuweilen mit der
des Sterns verglichen zu werden, um sei-
, der durch so viel äussere Ursachen gestört
ann, zu reguliren.

§. 36.

richtet den Gang der astronomischen Pen-
so ein, dass von einer Culmination des
s des Widders, bis zur nächst folgenden
Stunden verfliessen, und zwar zeigt die
t bei der Culmination dieses Punktes immer
so dass wenn man irgend eine Zeit, welche
zeigt, durch das Verhältniss von 15 Grad
Stunde in Bogen des Aequators verwandelt,
ich die gerade Aufsteigung aller in diesem
e culminirenden Punkte des Himmels erhält.
ıt den angegebenen Zeitraum einen Stern-
sagt die Uhr gehe nach Sternzeit. Diese
g ist freilich nicht ganz passend, da ver-
Zurückgehens der Aequinoctialpunkte, der
, der zwischen den zwei auf einander fol-
ılminationen eines Sterns enthalten ist, et-
r ausfällt, als der welcher zwischen zwei

§. 39.

eit, welche durch die Bewegung der Sonne
wird, heisst wahre oder scheinbare
die Bewegung dieses Himmelskörpers aber
rmig ist, indem er sich bald schneller bald
bewegt, so folgt, dass keiner der auf diese
mten Tage dem andern gleich seyn kann.
er nicht möglich, dass eine Uhr nach die-
gehen kann, sondern blos die Sonnenuhr
re Sonnenzeit anzeigen können. Man muss
auf eine dritte Art der Zeitbestimmung,
ie man durch den gleichförmigen Gang der
tellen konnte, und welche sich zugleich
weit von der wahren Zeit entfernte. Man
er eine eingebildete Sonne an, die sich mit
iger Bewegung im Aequator bewegt, so
zweite Sonne mit der wahren einmal zu
eit aus dem Frühlingsaequinoctialpunkt aus-
mit einer Geschwindigkeit, die der mittlern
igkeit der wahren Sonne gleich ist, den
durchläuft. Hierdurch wird die eingebil-
e der wahren Sonne bald etwas voreilen,
r ihr zurückbleiben, allein immer werden
ide immer nur klein, und der Unterschied
iten periodisch seyn. Man nennt die durch
ebildete Sonne dargestellte Zeitbestimmung,
ere Zeit. Ein solcher mittlerer Sonnentag
it, welche zwischen zwei auf einander fol-
ulminationen der eingebildeten Sonne ver-
nd der Unterschied zwischen der wahren
mittleren Zeit wird die Zeitgleichung

Von der Bewegung der Erde.

§. 40.

Erscheinung, dass der Himmel sich in 24
einmal um eine bestimmte Axe von Osten
sten herumdreht, lässt sich dadurch erklä-
s man annimmt, die Erde selbst drehe sich

in derselben Zeit in entgegengesetzter Richtung von Westen nach Osten um eine Axe, welche mit der früher angenommenen Weltaxe zusammenfällt. Man kann freilich anfangs nicht mit Gewissheit bestimmen, welche von beiden Annahmen die richtige sey, ob der Himmel sich um die Erde dreht, oder ob diese Bewegung nur scheinbar ist, und durch die entgegengesetzte Drehung der Erde hervorgebracht wird, allein einige Ueberlegung lehrt bald, dass die letztere Annahme bei weitem die wahrscheinlichere ist, da die erstere allen Gesetzen der Mechanik widerstreitet, indem die ewige Bewegung der Sterne in Parallelkreisen sich auf keine Art erklären lässt, und physisch unmöglich ist. Ausser andern tiefer liegenden Beweisen für die Umdrehung der Erde, ist in unsern Tagen durch die über den Fall der Körper angestellten Versuche ein sehr einfacher und überzeugender Beweis geliefert worden, indem wenn die Erde sich wirklich um ihre Axe dreht, ein von einer bedeutenden Höhe herabfallender Körper, nicht den senkrecht unter dem Anfangspunkte der Bewegung liegenden Punkt treffen kann, sondern sich nach der Richtung von demselben entfernt, in welcher sich die Erde dreht, und die von Benzenberg angestellten Versuche haben auch wirklich eine mit der Theorie übereinstimmende Abweichung nach Osten zu gezeigt.

§. 42.

Man kann auf folgende Art leicht zeigen, dass erwähnte Umdrehung der Erde die scheinbare egung des Himmels, genau wie wir sie beobach- hervorbringen muss. Es sey (Fig. 3.), in *C* der des Beobachters, in *S* ein Stern; wir beschrei- mit dem Halbmesser *CS* eine Kugel aus *C* als telpunkt, *CP* sey die nach dem Pol gezogene ie, und *CA* senkrecht auf *CP* in der Ebene *PCA*, durch den Stern und die Weltaxe *CP* gelegt ist. müssen hierbei wegen den geringen Dimensio- des Erdkörpers gegen die unendlich grosse Ent- ung der Sterne von der Erde den Beobachter st in die Weltaxe stellen. Zieht ma ferner *BC* recht auf *AC* und *PC*, so giebt *BCA* den Aequa- , und der Kreis *PSA* stellt den Declinationskreis Sterns *S* dar. Die Verticallinie habe zu irgend r Zeit die Lage *CZ*, so dass *Z* das Zenith ver- t, und der Kreis *PZE* den Meridian angiebt, n wird *ZS* im Verticalkreise liegen und die Ze- distanz seyn, der Winkel *SZE* das Azimuth, *Z* der Stundenwinkel. Dieses Dreieck *SPZ* ist dem gleichnamigen (Fig. 1.) ganz übereinstim- d, es ist also zur Erklärung der Bewegung des mels ganz einerlei, ob wir das Zenith uns als denken, und den Stern *S* bewegen lassen, oder wir den Stern ruhend annehmen, und die Verti- inie *CZ* um die Weltaxe so herumführen, dass Winkel *PCZ* immer derselbe bleibt.

§. 43.

Es bleibt nun noch zu entscheiden, ob die Bewe- g der Sonne, vermöge deren sie sich in einem r einmal um die Erde bewegt, wirklich vorhan- , oder nur scheinbar ist, und durch die Bewe- g der Erde um die Sonne hervorgebracht wird. n sieht leicht, dass beide Annahmen völlig gleiche cheinungen geben müssen, da wenn wir von der le aus, die Sonne in einer bestimmten Richtung en, die Erde von der Sonne aus gesehen, grade entgegengesetzter Richtung erscheinen wird. Es

sind aber zu viel Gründe vorhanden, die Bew
der Erde um die Sonne anzunehmen, als dass
länger zwischen beiden Annahmen schwanken
und der Satz, die Erde bewegt sich um die S
ist nicht mehr als eine blosse Hypothese, sonde
ein mit fast geometrischer Schärfe bewiesene
anzusehen. Schon nachdem Kepler aus den
achtungen das schöne Gesetz über die Bewegu
Planeten um die Sonne abgeleitet hatte, vermö
sen die Würfel der mittlern Entfernungen d
neten von der Sonne, sich wie die Quadrat
Umlaufszeiten um dieselbe verhalten, konnt
durch Vergleichung der Umlaufszeiten und d
fernungen der Sonne und des Mondes von d
gegen, dass wenn einer dieser Körper sich
Erde bewegte, der andere auf keine Weise
die Erde bewegen konnte, wenn man nicht da
die Planetenbewegung aus den Beobachtunge
leiten und späterhin aus den allgemeinen m
schen Grundsätzen bewiesene Gesetz in Zwei
ken wollte.

§. 44.

Nimmt man nämlich die Umlaufszeit des
um die Erde als die Einheit an, so beträgt d
Bahn in der Sonne um die Erde dreizehn
Einheiten, und wenn x die Bahn angiebt, wie

der Erde um die Sonne übrig, da nach den
:zen der Dynamik der kleinere Körper sich
grössern bewegen mus, und die Masse oder
on Materie der Sonne, die der Erde mehr
)0 mal übertrifft.

§. 45.

ehlte nur noch an einem näher liegenden Be-
er so augenscheinlich die Bewegung der Erde
Sonne darthat, wie die erwähnten Versuche
ı Fall der Körper die Drehung der Erde um
zeigten. Hierzu gab ein Einwand der Gegn
Bewegung der Erde eine Veranlassung. Diese
nämlich, dass wenn die Erde eine so grosse
ı die Sonne beschrieb, deren Durchmesser
)nen Meilen beträgt, so müsste diese Verän-
des Standpunktes eine Veränderung in der
r Fixsterne gegen einander hervorbringen,
man die jährliche Parallaxe der Fixsterne
Im November 1725 fingen Bradley und
ux an, hierüber Beobachtungen anzustellen,
: fanden keine Parallaxe, wohl aber eine an-
ränderung der Lage der Fixsterne, die sich
schon vorher von Römer gefundenen Bewe-
s Lichts verbunden mit der Bewegung der
klärte. Da diese Erscheinung, welche die
tion genannt wird, nicht statt finden konn-
die Erde sich nicht bewegte, so war hier-
ie Bewegung der Erde um die Sonne direct

§. 46.

Bahn der Erde um die Sonne ist eine Ellip-
:he nicht viel von Kreise abweicht, und in
nen Brennpunkt sich die Sonne befindet. Die
osse Axe der Erdbahn beträgt nach den Un-
ngen von Enke aus dem Durchgange der
urch die Sonne abgeleitet

20666800 Meilen

: kann den Gränzen zufolge, innerhalb wel-
: Genauigkeit dieser Art Beobachtungen ein-

…n der Gestalt der Erde im Allgemeinen.

§. 48.

Es scheint anfangs etwas ungereimt, nach einer …sonderen Darstellung der Oberfläche der Erde zu …gen, da der blosse Augenschein eine so grosse Un…gelmässigkeit in der Gestaltung derselben zeigt, dass …ine mathematische Formel im Stande ist, die Natur …ser Oberfläche genau auszudrücken. Allein diese …regelmässige Gestalt ist es auch keineswegs, wel…e man bei der Aufstellung der Frage über die Be…stimmung der quantitativen Natur der Oberfläche, der …de zu wissen verlangt, sondern man will diejenige …rfläche bestimmt wissen, welche das Wasser an…nehmen würde, wenn es die ganze Erde bedeckte, …an setzt daher alle die Unregelmässigkeiten bei Sei…, die durch die auf der Oberfläche der Erde be…findlichen Berge und Thäler entstehen, welches um …eher angeht, da auch die grössten Erhebungen der …iche des festen Landes über die Oberfläche des …eeres, gegen die grosse Ausdehnung der Erde …sserst gering sind. Dass bei dieser Ansicht die …doberfläche eine bestimmbare Gestalt haben wird, …gt daraus, weil das Wasser nach den Gesetzen …s Gleichgewichts der Flüssigkeiten eine regelmässige …ur annehmen muss, und die Oberfläche des festen …ndes, abgesehen von den einzelnen, zufälligen, grös…eren oder kleineren Erhöhungen, an allen Orten der …de fast mit der Oberfläche des Meeres zusammen…lt, also im Allgemeinen die Oberfläche des festen …ndes dieselbe Gestalt als die der Oberfläche des …eeres haben muss.

§. 49.

Die Alten hatten sehr sonderbare Ideen über die …estalt der Erde, und zwar scheint die älteste Mei…ung unter den Griechen diejenige gewesen zu seyn, …ch welcher die Erdoberfläche eine flache Scheibe …ar, die rund herum von dem grossen Strom Okea-

§. 53.

Dass die Erde eine Oberfläche bildet, die nicht sehr von der einer Kugel verschieden ist, lässt sich aus den einfachsten Beobachtungen darthun, die ein jeder Reisende, wenn er auch nur mit schlechten Instrumenten versehen ist, anstellen kann. Geht man nämlich auf der Erde in der bestimmten Richtung von Norden nach Süden fort, und giebt zugleich auf den verschiedenen Stand der Gestirne acht, so zeigt sich, dass jeder beliebige Stern bei seiner Culmination an der Südseite des Himmels immer höher zu stehen kommt je weiter man nach Süden zu fortgeht, während die nördlichen Sterne sich mehr und mehr senken, und viele die am ersten Standorte noch über dem Horizont in ihrer untern Culmination sichtbar waren, unter dem Horizont verschwinden. Die Zunahme der Erhöhung findet man immer dem zurückgelegten Wege proportional; so dass bei einem in der angegebenen Richtung gemachten Wege von ungefähr 15 Meilen, der Stern sich um einen Grad erhoben hat. Die entgegengesetzte Erscheinung, nämlich das allmählige Sinken der südlichen Sterne nach dem Horizont zu, findet statt, wenn man vom anfänglichen Standpunkte aus nach Norden zu fortgeht.

nanonen den Beobachtungen zufolge dem zu-
egten Wege proportional, folglich wird auch
inkel der Berührungslinien mit einander dem
AB proportional werden. Zieht man ferner
ie beiden Linien *AB* und *BC* senkrecht auf
ührungslinien, so geben diese die Richtungen
·ticale an beiden Orten an, und der Winkel,
le bilden, ist die Amplitude des Bogens *AB*.
ıber bekanntlich der Winkel *ACB* = *EDA*,
wird die Amplitude dem Bogen proportional
issen.

§. 55.

lässt sich nun leicht beweisen, dass der auf
le zurückgelegte Weg ein Kreisbogen seyn
Nennt man einen unendlich kleinen Bogen *ds*,
plitude $d\varphi$, den Krümmungshalbmesser *r*, so
antlich

$$ds = rd\varphi.$$

das Verhältniss von *ds* zu $d\varphi$ constant seyn
setze man

$$ds = ad\varphi.$$

raus ergiebt sich $r = a$; bezieht man ferner
ickgelegte krumme Linie auf zwei Coordina-
nnd bezeichnet die Coordinaten jedes Punktes
n durch x und y, so hat man bekanntlich

ros genannt, umflossen ist, in dem sich die Sonne bei ihrem Untergange eintauchte; mehrere wollten sogar das Zischen, welches die Sonne bei ihrem Sinken im Wasser verursachte, gehört haben. Thales nahm an, die Erde werde vom Wasser getragen; Anaximenes gab ihr eine Unterstützung von stark verdichteter Luft; Anaximander sah sie für einen Cylinder an, dessen eine Grundfläche bewohnt war; die Indier meinten, sie ruhe auf Elephanten.

§. 50.

Man hatte jedoch auch schon im Alterthume die Meinung von der runden Gestalt der Oberfläche der Erde aufgestellt, welche Annahme vorzüglich Pythagoras lehrte, und in seiner Schule fortgepflanzt wurde. Pythagoras hatte diese Lehre wahrscheinlich auf seinen Reisen in Aegypten von den dortigen Priestern erhalten. Ueberhaupt scheinen die Aegypter und Chaldäer bessere Ansichten über diesen Gegenstand besessen zu haben, als die Griechen, indem die Chaldäer ziemlich genau den Umfang der Erde dadurch angaben, dass sie sagten, ein guter Fussgänger brauche drei Jahre um einmal um die Erde herum gehen zu können.

§. 51.

elnde Völker grössere Reisen machten, und h leicht richtigere Begriffe über die Ausdeh- r Erde erhalten konnten. Man kann übri- er diese verschiedenen Meinungen Riccioli phia reformata und Bailly Histoire tronomie ancienne nachlesen.

§. 52.

loxus scheint unter den Griechen einer der ewesen zu seyn, der der Erde eine regel- ekrümmte Oberfläche beilegte, indem er auf leisen durch die damals bekannten Länder, ch sein Augenmerk auf die verschiedene r Gestirne gegen den Horizont richtete, und allmähligen Hervortreten und Verschwinden a auf eine Krümmung der Erde schloss. Die- losophen folgte Aristoteles, welcher aus chen Gründen die kugelförmige Gestalt der beweisen suchte, indem er von dem Grund- sging, dass das Wasser vermöge seiner und leichten Verschiebbarkeit der einzelnen esselben, sich so sehr als möglich zu senken und hierdurch sich dem Mittelpunkte der glichst zu nähern suchte. Sollte nun das die Stellung des Gleichgewichtes einmal an- en haben, so musste es in allen Punkten sei- rfläche gleichweit vom Mittelpunkte entfernt lso eine Kugeloberfläche bilden. Dieser Be- zt freilich einen Mittelpunkt, nach welchem zu sinken sich bestrebt, voraus, so dass ein n Schliessen begangen ist, da dieses Vorhan- eines Mittelpunktes erst bewiesen werden ch ist derselbe immer merkwürdig, da er e auf diese Art geführte ist, und die neuern tischen Untersuchungen über die Gestalt der nter der Voraussetzung, dass die Erde ganz r Flüssigkeit besteht, und keine Drehung um e besitzt, ganz dasselbe zeigen.

Nun ist aber im Dreieck DEA

$$EDA = SED - SAT$$
$$= SBV - SAT$$

olglich ist der Winkel der beiden Berührungslinien leich dem Unterschiede der beiden Culminationshö- en des Sterns. Ferner ist der Unterschied der Cul- inationshöhen den Beobachtungen zufolge dem zu- ickgelegten Wege proportional, folglich wird auch r Winkel der Berührungslinien mit einander dem Vege AB proportional werden. Zieht man ferner ch die beiden Linien AB und BC senkrecht auf e Berührungslinien, so geben diese die Richtungen r Verticale an beiden Orten an, und der Winkel, n beide bilden, ist die Amplitude des Bogens AB. ; ist aber bekanntlich der Winkel $ACB = EDA$, olglich wird die Amplitude dem Bogen proportional yn müssen.

§. 55.

Es lässt sich nun leicht beweisen, dass der auf r Erde zurückgelegte Weg ein Kreisbogen seyn uss. Nennt man einen unendlich kleinen Bogen ds, ie Amplitude $d\varphi$, den Krümmungshalbmesser r, so t bekanntlich

$$ds = rd\varphi.$$

nd da das Verhältniss von ds zu $d\varphi$ constant seyn oll, so setze man

$$ds = ad\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich $r = a$; bezieht man ferner ie zurückgelegte krumme Linie auf zwei Coordina- onen, und bezeichnet die Coordinaten jedes Punktes erselben durch x und y, so hat man bekanntlich en Krümmungshalbmesser

$$r = -\frac{dx}{dp}(1 + pp)^{\frac{3}{2}}$$

wo p das Verhältniss $\frac{dy}{dx}$ bedeutet, und da $r = a$ seyn muss, so erhält man die Differentialgleichung der krummen Linie

$$a = -\frac{dx}{dp}(1 + pp)^{\frac{3}{2}}$$

oder auch $\frac{dx}{a} + \frac{dp.}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} = 0.$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man $p = tang\,\theta$. so wird

$$dp = \frac{d\theta}{\cos\theta^2}; (1+pp)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cos\theta^2} \text{ folglich}$$

$$\frac{dx}{a} + d\theta \cos\theta = 0.$$

Dies giebt integrirt

$$x + a \sin\theta = c.$$

wo c eine willkührliche Constante ist. Hieraus folgt

$$\sin\theta = \frac{c-x}{a},$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{aa-(c-x)^2}}{a},$$

$$tang\,\theta = \frac{c-x}{\sqrt{aa-(c-x)^2}}$$

und da ausserdem

$$tang\,\theta = p = \frac{dy}{dx},$$

so wird, wenn man in voriger Gleichung statt $tang\,\theta$ $\frac{dy}{dx}$ setzt, und auf beiden Seiten mit dx multiplicirt

$$dy = \frac{(c-x)\,dx}{\sqrt{aa-(c-x)^2}}.$$

Integrirt man diese Gleichung von neuem, so kommt

$$y = c' + \sqrt{aa-(c-x)^2} \text{ oder}$$

$$(c'-y)^2 + (c-x)^2 = aa.$$

welches bekanntlich die Gleichung eines Kreises ist.

§. 56.

Aus dem vorigen Beweise über die Rundung der Erde folgt aber blos, dass diejenige Linie, welche auf der Erdoberfläche in der Richtung von Süden nach Norden geht, ein Kreis sey, allein noch nicht

ss die Erde eine Kugel sey. Man sieht nämlich icht, dass dieselben Erscheinungen statt finden würn, wenn die Erde ein gerader Cylinder mit kreisrmiger Grundfläche wäre, und sich um eine Axe ehte, deren Richtung senkrecht auf der geometrihen Axe des Cylinders steht. In diesem Falle würe aber die Erde in der Richtung von Osten nach Vesten nicht gekrümmt seyn, welches der Erfahng widerspricht. Denn befindet man sich auf eim hohen Berge, der vom festen Lande oder vom eere umgeben ist, wie dies z. B. beim Pico de Teeriffa statt findet, so findet man, dass nach jeder ite die Aussicht gleich gross ist, also muss die Erde ch allen Richtungen ziemlich gleichförmig gerümmt seyn.

§. 57.

Eine andere Beweisführung für die Krümmung r Erde von Osten nach Westen, giebt die Bemerng, dass wenn die Erde ein solcher Cylinder ist, ie so eben beschrieben worden, so werden alle Vercallinien in parallelen Ebenen liegen, welche senkcht auf der geometrischen Axe des Cylinders stehen, so würde ein Himmelskörper an allen Orten der de zu gleicher Zeit culminiren. Nun zeigt sich er, dass wenn z. B. der Mond verfinstert wird, rselbe nicht für alle Orte der Erde eine gleiche ge gegen den Meridian hat; einigen steht er östh andern westlich von der Meridianebene, folglich nnen die Meridianebenen eben so wenig als die erticallinien einander parallel seyn. Wir werden her die Erde als einen beinahe kugelförmigen Körr ansehen können.

§. 58.

Auch die vielen Umschiffungen der Erde haben e Richtigkeit dieses Satzes dargethan, indem überl die Oberfläche des Meeres gleichförmig gekrümmt schien. Die Namen derjenigen welche die Erde msegelt haben sind folgende:

1) Portugiesen. Fernando Magelhaens, 1519.

2) Engländer. Francis Drake, 1577. Thomas Candish, 1586. Cowley, 1683. William Dampier, 1683. Woodes Rogers, 1708. Edward Cooke, 1708. Clipperton und Shelvoke, 1719. Anson, 1740. John Byron, 1764. Samuel Wallis, 1766. Philipp Carterer, 1766. James Cook, 1769, 1775, 1776. Fourneaux, 1772. Portlock und Dixon, 1785. Edwards, 1790. George Vancouver, 1790.

3) Holländer. Simon Cordes, 1598. Oliver van Noort, 1598. Jacob le Maire und Cornelius van Schouten, 1615. Jacob Hermita und Schapenham, 1623. Roggewin, 1721.

4) Deutsche. Georg Spielberg, 1614. Otto von Kotzebue, 1815.

5) Italiäner. Gemelli Careri, 1683.

6) Franzosen. Le Gentil de la Barbinair, 1714. Bougainville, 1766. Etienne Marchand, 1790. Freycinet, 1817.

7) Russen. Alexander von Krusenstern, 1803.

§. 59.

Die Bestimmung der Lage der Oerter auf der Erde, geschieht auf eine ähnliche Art als die Bestimmung der Lage der Sterne an der Himmelskugel, nämlich durch die geographische Breite und die geographische Länge. Die geographische Breite eines Ortes ist derjenige Winkel, welchen die an diesem Ort gezogene Verticallinie mit einer Ebene macht, die senkrecht auf der Drehungsaxe der Erde steht, und man sieht leicht, dass dieser Winkel nicht anders als die früher erwähnte Polhöhe ist. Fällt diese Verticallinie mit der angegebenen Ebene zusammen, so liegt der Ort auf dem Aequator der Erde, und für alle solche Oerter wird die geographische Breite Null seyn. Die Breite ist entweder nördlich oder südlich, je nachdem die Verticallinie zwischen dem nördlichen Weltpole und dem Aequator, oder dem südlichen Weltpole und dem Aequator, die Himmelskugel trifft. Die geographische Länge ist der Winkel, welchen die Meridianebene des Ortes (§. 8.) mit der Meridianebene eines andern

mt man die Erde als eine Kugel an, oder
ɔt als einen Körper, der durch Umdrehung
enen Figur um eine Axe, die mit der Dre-
: der Erde zusammenfällt, entstanden ist (ein
ter Revolutionskörper), so werden die
uf der Erdoberfläche, welche durch alle die
gezogen werden, die gleiche geographische
aben, Kreise darstellen, und Parallelkreise
dann ist der Erdaequator ebenfalls ein Kreis,
ı kann die Polhöhe oder geographische Breite
definiren, dass man sagt, sie sey der Win-
ılchen die verlängerte Richtung der Vertical-
r eines Pendels mit der durch den Aequator
: gelegten Ebene macht. Zieht man durch
en Erdpole, welche diejenigen Punkte sind,
ıen die Verticallinie mit der Erdaxe zusam-
, und die gleichnamig mit den Himmelspolen
dpol und der Südpol genannnt werden, eine
ɹinie, so stellt diese die Länge der Erd-
', und der Durchschnittspunkt dieser Linie
Ebene des Aequators giebt den Mittelpunkt
le an.

§. 61.

: Linie welche vom Mittelpunkt der Erde
gend einem Orte ihrer Oberfläche gezogen
ɔildet mit der Aequatorsebene einen Winkel,

punkt der Erde reduciren will, indem der Mond zu nahe ist als dass man die Erde als eine Kugel betrachten könnte, und die verschiedenen Entfernungen der Beobachtungsörter vom Mittelpunkte merklich werden. Nimmt man die Erde als eine Kugel an, so wird die geographische Breite mit der geocentrischen zusammenfallen, weil bei dieser Gestalt der Erde, die Richtungen der Verticallinien mit denen der Halbmesser, eine und dieselbe grade Linie ausmachen.

§. 62.

Die Erdmeridiane bilden bei der Annahme eines Revolutionskörpers, krumme Linien, die in einer Ebene liegen, und nothwendigerweise sowohl unter einander, als auch mit derjenigen, durch deren Umdrehung die Erde als entstanden angenommen wird, übereinstimmen müssen. Die geographische Länge ist dann der in Graden, Minuten u. s. w. ausgedrückte Bogen des Aequators, der zwischen den beiden Punkten liegt, die durch die Durchschnitte des ersten Meridians und des Meridians desjenigen Ortes von dem die Länge verlangt wird, gebildet werden. Die geographische Länge ist entweder **östlich** oder **westlich**, je nachdem der Ort vom ersten Meridian aus nach Osten oder nach Westen zu liegt, so dass man bei dieser Eintheilung die Länge immer nur bis 180° zu zählen braucht, [redacted]

eine solche Willkühr in dieser Sache herrscht; allein die Natur des Gegenstandes bringt es mit sich, dass immer eine gewisse Willkührlichkeit statt finden muss, da diese Länge nicht, wie die geographische Breite, an einem gewissen Orte absolut bestimmt werden kann, sondern blos der Unterschied der Länge oder die Meridiandifferenz gefunden wird. Ueberhaupt ist diese Klage von eben demselben Belange, als wenn man sich beschwerte, dass z. B. in der analytischen Geometrie, bei der Aufstellung der Gleichung für die Ellipse der Anfangspunkt der Abscissen, bald im Mittelpunkt, bald im Scheitel, bald im Brennpunkt desselben angenommen wird.

§. 64.

Ptolomäus legte den ersten Meridian durch die canarischen Inseln; diese Annahme ist aber etwas unbestimmt, da die canarischen Inseln nicht nur einen ziemlichen Raum einnehmen, sondern auch mehr auf einem Parallelkreise als in einem Meridian liegen. Auf Befehl Ludwig XIII. wurde der erste Meridian durch die Insel Ferro angenommen, und nach den Bestimmungen von de l'Isle lag diese Insel 20° westlich von Paris. Allein spätere genauere Messungen haben gezeigt, dass auf diese Art der erste Meridian jenseits Ferro ins Meer fällt, man hat aber fortgefahren den ersten Meridian als 20° westlich von Paris liegend anzunehmen, und nennt denselben den durch Ferro gezogenen; dieser wird auch bei Verzeichnung von Landcharten meistens als der erste angenommen. Es ist zu bemerken, dass die Namen Länge und Breite durch die mangelhaften Kenntnisse der Alten über die Länder entstanden sind, indem dieselben weit mehr in der Richtung von Osten nach Westen, als in der darauf senkrechten von Süden nach Norden konnten, so dass die Darstellung der damals bekannten Länder ein Rechteck bildete; da man nun gewohnt ist, die grösste Dimension eines Rechtecks die Länge, die kleinere die Breite zu nennen, so ging diese Benennung auf die geographische Bestimmung der Oerter über. Die Methoden, durch welche die Länge und Breite eines

Ortes auf der Erde zu finden sind, werden in der Folge ausführlich dargestellt werden, und machen die sogenannte geographische Ortsbestimmung aus.

§. 65.

Diejenigen Oerter, deren Polhöhen der Schiefe der Ecliptik gleich sind, liegen auf den Wendekreisen (tropici), und zwar die in der nördlichen Hälfte der Erde auf dem Wendekreise des Krebses, die in der südlichen Hälfte auf dem Wendekreise des Steinbocks; diejenigen, deren geographische Breite der Ergänzung der Schiefe der Ecliptik zu 90° gleich ist, befinden sich auf den Polarkreisen; der in der nördlichen Halbkugel heisst der arctische, der auf der südlichen Halbkugel der antarctische Polarkreis. Diese vier Kreise theilen die ganze Erdoberfläche in fünf Theile, welche Zonen genannt werden. Die zwischen dem arctischen Polarkreise und dem Nordpol liegenden Gegenden bilden die nördliche kalte Zone, vom Polarkreise bis zum Wendekreise des Krebses befindet sich die nördliche gemässigte Zone, zwischen den beiden Wendekreisen des Krebses und des Steinbocks liegt die heisse oder tropische Zone, die Gegenden vom Wendekreise des Steinbocks bis zum antarctischen Polarkreise bilden die südliche gemässigte Zone, und endlich der übrige Theil der Erdoberfläche zwischen dem antarctischen Polarkreise und dem Südpol macht die südliche kalte Zone aus.

§. 66.

In den ältern Erdbeschreibungen, werden für diejenigen Oerter, welche zu einem bestimmten Orte eine gewisse Lage haben, besondere Namen aufgeführt, die freilich an sich von keiner Wichtigkeit sind, allein der Vollständigkeit wegen hier mit angegeben werden sollen. Nimmt man einen bestimmten Ort auf der Erdoberfläche an, so heissen diejenigen, welche auf demselben Parallelkreise leben, aber in der Länge um 180° verschieden sind, Nebenwoh-

äche dieselbe Gestalt hat als die nördliche, so eine von dem zuerst angenommenen Orte durch Mittelpunkt der Erde gezogene Linie, die Gegen- dieses Ortes treffen.

den Tageszeiten und den Jahreszeiten.

§. 67.

Man unterscheidet im bürgerlichen Tage vier tzeitpunkte, die durch eine gewisse Lage der gegen den Horizont bestimmt werden, nämlich gen, Mittag, Abend und Mitternacht. Morgen findet statt, wenn die Sonne über den ont heraufsteigt, der Mittag wenn die Sonne in Meridian tritt, der Abend beim Untergange der , und endlich Mitternacht, wenn die Sonne durch ördlichen Theil des Meridians geht. Die zwi- diesen vier Zeitpunkten enthaltenen Zeiträume n die vier Tageszeiten aus, und heissen Vor- , Nachmittag, Vormitternacht und Nachmitter- Im Allgemeinen nennt man die Zeit, welche nne über dem Horizont zubringt, Tag, die- , während welcher sie unsichtbar ist, Nacht. ufgang und der Untergang der Sonne, so wie

die gerade Aufsteigung der Sonne in Betracht, und es folgt hieraus, dass in allen Oertern, die auf demselben Parallelkreise liegen, beim Aufgange und Untergange der Sonne gleiche Zeit gezählt wird. Dieses ist aber nicht so zu verstehen, als ob diese Erscheinungen für alle auf demselben Parallelkreise liegenden Oerter, in demselben physischen Zeitpunkt geschähen, sondern es heisst nur, die vom Aufgange bis zur Culmination der Sonne, oder die von der Culmination der Sonne bis zu ihrem Untergange verfliessende Zeit, ist für alle besagten Oerter dieselbe.

§. 68.

Es sey (Fig. 1.) in S die Sonne, HR der Horizont, SP die Polardistanz der Sonne, ZS ihre Zenithdistanz, HZR der Meridian des Orts, so ist ZP das Complement der geographischen Breite oder der Polhöhe, SP das Complement der Declination der Sonne. Man setze

die Declination $= \delta$
die Polhöhe $= p$.
den Stundenwinkel $ZPS = s$.
die Zenithdistanz $ZS = z$.

so hat man im Dreieck ZPS

$$\cos z = \sin \delta . \sin p + \cos \delta . \cos p . \cos s.$$

Man würde nun den Aufgang oder Untergang der Sonne finden, indem man in dieser Gleichung $z = 90°$ setzte, da, wenn die Sonne eine Zenithdistanz von 90° hat, sie sich im Horizont befinden muss, und aus dem übrigbleibenden Theile s bestimmte. Der in Zeit verwandelte Stundenwinkel würde dann angeben, wie lange vor der Culmination die Sonne aufgeht.

§. 69.

Es sind aber hierbei noch zwei Umstände zu berücksichtigen, von denen der eine immer den Aufgang der Sonne beschleunigt und den Untergang verzögert, der andere aber diese Zeitpunkte bald verzögern bald beschleunigen kann. Der erste Umstand rührt daher, dass das Licht der Sonne, so wie auch

per höher über dem Horizont zu stehen, als
re die Strahlenbrechung der Fall seyn würde.
uss daher, um den Aufgang oder Untergang
ne zu finden, statt der scheinbaren Zenith-
von 90°, die wahre Zenithdistanz = 90° +
raction, die wir durch r bezeichnen wollen,
rer Formel setzen, so dass für den Stand der
im Horizont, der Stundenwinkel s durch die
ng

$90 + r) = \sin \delta . \sin p + \cos \delta \cos p \cos s.$

urch

$- \sin r = \sin \delta . \sin p + \cos \delta . \cos p . \cos s$

it werden wird.

§. 70.

as den zweiten Umstand betrifft, so muss man
en, dass die Sonne unter den Sternen eine Bahn
ibt, welche weder mit dem Aequator zusam-
t, noch mit ihm parallel läuft, so dass die De-
n derselben sich immerwährend ändern, und
om Wintersolstitium zum Sommersolstitium zu-
, von da rückwärts wieder abnehmen muss.
eränderung muss mit in Rechnung gezogen wer-
id um dies thun zu können, ist es nothwendig,
lination der Sonne für einen Zeitpunkt, am be-

$360^\circ : n = s : x$. so wird

$x = \frac{ns}{360}$ die gesuchte Veränderung angeben.

§. 71.

Bezeichnet man nun durch δ' den Werth der Declination, welcher bei dem Eintritte der Sonne in den Meridian statt findet, so wird die Declination beim Stundenwinkel s durch $\delta' \pm x$ ausgedrückt werden, wo das $+$ Zeichen für einen westlichen, das $-$ Zeichen für einen östlichen Stundenwinkel gilt. Man hat also zur Bestimmung des Stundenwinkels beim Aufgange oder Untergange der Sonne die Formel

$$-\sin r = \sin(\delta' \pm x) \sin p + \cos(\delta' \mp x) \cos p . \cos s$$

aus welcher s gefunden wird. Man kann bemerken, dass wenn die Declination der Sonne abnimmt, statt $+ n$, $- n$ genommen werden muss. Uebrigens kann die Zeit des Aufganges und Unterganges der Sonne, nie mit grosser Genauigkeit gefunden werden, da der Winkel r sehr veränderlich ist; in unsern Gegenden kann man denselben im Mittel bei gemässigter Temperatur und mittlern Barometerstande zu 33 Minuten annehmen.

§. 72.

Um aus der vorigen Formel auf die kürzeste Art den Winkel s zu bestimmen, vernachlässige man bei einer ersten Annäherung die Grösse x, und berechne s blos aus der Formel

$$-\sin r = \sin \delta' \sin p + \cos \delta' \cos p \cos s$$ so dass

$$\cos s = -\frac{\sin r + \sin \delta' \sin p}{\cos \delta' \cos p}.$$

Vermittelst dieses gefundenen Werthes von s findet man,

$x = \frac{ns}{360}$ und dann suche man einen neuen Werth von s aus der genauern Gleichung

$$\cos s = -\frac{\sin r + \sin(\delta' \mp x) \sin p}{\cos(\delta' \mp x) \cos p}.$$

$\delta' = 15^\circ\ 4'\ 15''$
$p = 51^\circ\ 31'\ 47''$
$n = 18'\ 2''$, $r = 33'$

findet man

$\sin \delta' = 9.4149951$
$\sin p = 9.8937235$
$9.3087186.$

die Zahl $= 0{,}2035722$
$\sin r = 0{,}0095992$
$0{,}2131714.$

$\cos \delta' = 9.9847996$
$\cos p = 9.9644574$
$9.7786658.$

$\log(-0{,}2131714) = 9.3287289\, n$ *)
$= 9.7786658$
$\log \cos s = 9.5500631.\, n$
$s = 110^\circ\ 47'\ 7''$

Hieraus ergiebt sich

$$x = \frac{ns}{360} = 5'\ 30''$$
$$\delta' - x = 14^\circ\ 58'\ 45''.$$

Wiederholt man die Rechnung indem statt δ', $-x$ gesetzt wird, so erhält man einen genaueren Werth. $s = 110^\circ\ 39'\ 8''$.

[illegible] der Sonne bei ihrem [illegible]

[illegible] 12 St. ab, so bleibt [illegible]

[illegible] Zeit ausgedrückt, und [illegible] Zeit zu haben, muss [illegible] Zeitgleichung, [illegible] indem der mittlere [illegible] einfällt als der wahre [illegible] Zeit der Aufgang [illegible]

[illegible] vernachlässigt, so würde man [illegible]

= 100° 40′ 38″

[illegible] Ze. = 7 St. 18′ 42″

[illegible] haben, und der Aufgang der Sonne wäre um [illegible] Uhr 41′ 18″

[illegible] also [illegible] später als mit Berücksichtigung der Strahlenbrechung.

[illegible] 74.

[illegible] Sonne würde gefunden, in- [illegible] für die Declination [illegible] kann kürzer dazu gelan- [illegible] Unterschied der beiden Werthe

winkel 110° 47′ 7″ verdoppelt, = 221° 34′ 14″ und dieses Product in Zeit verwandelt hätte.

§. 75.

Das im vorigen Paragraph angegebene Verfahren beruht darauf, dass, da die Declinationsänderung s immer nur gering ist, ihre höheren Potenzen ohne Nachtheil vernachlässigt werden können, und dass, wenn man den wahren Stundenwinkel beim Aufgange durch s', beim Untergange durch s'', und den mit der Declination δ' berechneten durch s bezeichnet, sehr genau

$$\frac{s' + s''}{2} = s$$

seyn wird. Um dies zu beweisen, bemerke man, dass der angenommenen Bezeichnung zufolge

$$\cos s' = -\frac{\sin r + \sin(\delta' - x)\sin p}{\cos(\delta' - x)\cos p},$$

$$\cos s'' = -\frac{\sin r + \sin(\delta' + x)\sin p}{\cos(\delta' + x)\cos p},$$

$$\cos s = -\frac{\sin r + \sin\delta' \sin p}{\cos\delta' . \cos p}$$

seyn muss.

Man hat ferner

$$\cos\frac{s' + s'}{2} = \cos\tfrac{1}{2}s' \cos\tfrac{1}{2}s'' - \sin\tfrac{1}{2}s' \sin\tfrac{1}{2}s''$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + \cos s')(1 + \cos s'')}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos s')(1 - \cos s'')}.$$

Nun ist bekanntlich mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von x,

$$\sin(\delta' - x) = \sin\delta' - x.\cos\delta'$$
$$\cos(\delta' - x) = \cos\delta' + x.\sin\delta'.$$

higlich wird

$$\cos s' = -\frac{\sin\delta' \sin p + \sin r - x\cos\delta' \sin p}{\cos\delta' \cos p + x \sin\delta' \cos p},$$

$$= -\frac{\sin\delta' \sin p + \sin r - x\cos\delta' \sin p}{\cos\delta' \cos p}(1 - x\,tg\delta')$$

$$= (\cos s + x \operatorname{tang} p)\ (1 - x \operatorname{tang} \delta')$$

oder endlich

$$\cos s' = \cos s + x\ (\cos s \operatorname{tang} \delta + \operatorname{tang} p).$$

Da in der Formel für s', nur $-x$ statt $+x$ gesetzt werden darf um die für s'' zu erhalten, so wird

$$\cos s'' = \cos s - x\ (\cos s \operatorname{tang} \delta + \operatorname{tang} p)$$

also

$$\cos s' + \cos s'' = 2 \cos s.$$

$$\cos s'\ \cos s'' = \cos s^2.$$

Da ferner

$$(1 + \cos s')(1 + \cos s'') = 1 + \cos s' + \cos s'' + \cos s' \cos s''$$
$$(1 - \cos s')(1 - \cos s'') = 1 - \cos s' - \cos s'' + \cos s' \cos s''$$

so ergiebt sich durch die Substitution der Werthe von $\cos s' + \cos s''$ und $\cos s'\ \cos s''$

$$(1 + \cos s')\ (1 + \cos s'') = (1 + \cos s)^2$$
$$(1 - \cos s')\ (1 - \cos s'') = (1 - \cos s)^2$$

folglich

$$\cos \frac{s' + s''}{2} = \tfrac{1}{2}\ (1 + \cos s) - \tfrac{1}{2}\ (1 - \cos s)$$
$$= \cos s.$$

und hierdurch ist die Richtigkeit des Verfahrens §. 74. erwiesen.

§. 76.

Man kann hier zugleich anmerken, dass der höchste Stand der Sonne über dem Horizont nicht bei ihrem Durchgange durch den Meridian statt findet, sondern eine kurze Zeit nachher oder vorher, je nachdem die Declination der Sonne im Zunehmen oder im Abnehmen ist. Denn wäre die Declination unveränderlich, so würde die Zenithdistanz gleich nach dem Durchgange durch den Meridian wieder zunehmen, wie dies wirklich bei den Fixsternen der Fall ist, allein diese Zunahme der Zenithdistanz wird eine Zeitlang durch die Zunahme der Declination, wodurch eine Annäherung der Sonne gegen den Pol entsteht, wieder aufgehoben, so dass erst nach dem Durchgange der Sonne durch den Meridian die Zenithdistanz ihren kleinsten Werth erreicht. Dasselbe findet auch beim Monde und den Planeten statt, und zwar ist beim Monde, wegen seiner schnellen Bewegung, der Unterschied zwischen dem Durchgange

durch den Meridian und der kleinsten Zenithdistanz am grössten.

§. 77.

Um den Stundenwinkel wirklich zu berechnen, für welchen die kleinste Zenithdistanz statt findet, wollen wir als Normalfall den annehmen, bei welchem die Declination des Himmelskörpers zunimmt. Man hat dann allgemein für den westlichen Stundenwinkel s,

$$\cos z = \sin(\delta' + x) \sin p + \cos(\delta' + x) \cos p \cos s.$$

Weil da im vorliegenden Fall s immer sehr klein ist, so darf man

$$\cos s = 1 - \tfrac{1}{2} ss$$

annehmen, und man hat

$$\cos z = \sin \delta' \sin p + \cos \delta' \sin p. x + (\cos \delta' \cos p - x \sin \delta' \cos p)(1 - \tfrac{1}{2} ss).$$

Vernachlässigt man das Product xss, und bezeichnet die Zenithdistanz beim Durchgange durch den Meridian durch z', so dass $z' = p - \delta'$, so erhält man die neue Gleichung

$$\cos z = \cos z' + x \sin z' - \tfrac{1}{2} \cos \delta' \cos p. ss.$$

Nun wird z desto kleiner je grösser $\cos z$ ist, also muss

$$x \sin z' - \tfrac{1}{2} \cos \delta' \cos p. ss$$

ein Maximum werden. Man setze dies $= \tfrac{1}{2} y$, und bemerke, dass $x = \frac{ns}{360}$, seyn muss, so wird

$$\cos \delta' \cos p. ss - 2s. \frac{n}{360} \sin z' = -y.$$

Lösst man diese quadratische Gleichung auf, so kommt

$$s. \cos \delta' \cos p = \frac{n \sin z'}{360} \pm \sqrt{\frac{n^2 \sin z^2}{360^2} - y \cos \delta' \cos p}$$

und man sieht aus der unter dem Wurzelzeichen stehenden Grösse, dass wenn s einen möglichen Werth erhalten soll

$$y \cos \delta'. \cos p < \frac{nn \sin z^2}{360^2}$$

$= \left(\frac{n}{720^\circ}\right) s.$

eser Bogen ist immer äusserst gering; in un-
beispiel hat man,

$$\frac{n}{720} = \frac{1082''}{720^\circ} = \frac{1}{2300}$$

ausserdem s in Bogen ausgedrückt $= 170''$ ist,
d $\Delta z = 0'',07$. Ich habe diese Betrachtung
ie kleinste Zenithdistanz hier aus dem Grunde
ausführlicher dargestellt, weil sie bei den Me-
die geographische Lage eines Ortes zu bestim-
gebraucht werden wird.

§. 78.

it man auf die im §. 72. angegebene Weise
ndenwinkel gefunden, so kann man auch noch
imuth, welches beim Aufgange oder beim Un-
e der Sonne statt findet, berechnen; bezeich-
n dasselbe durch A, so ist im Dreieck ZPS
) der Winkel $PZS = 180^\circ - A$, und man
n

$$P = \cos ZS.\ \cos SP + \sin ZS.\ \sin ZP.\ \cos SZP.$$

$ZP = 90 - p$, $ZS = 90 + r$

$SP = 90 - \delta' \pm x$ das obere Z. für Auf-

§. 79.

Will man das Verhältniss der Tageslänge an den verschiedenen Orten der Erde nur im Allgemeinen übersehen, so kann man die Veränderung x der Declination währen des Tages, so wie auch die Refraction r vernachlässigen. Nimmt man dann die Formel

$$\cos z = \sin \delta . \sin p + \cos \delta \cos p . \cos s$$

wieder vor, so ergiebt sich aus derselben, indem wir $z = 90°$ setzen

$$\cos s = - \tang \delta . \tang p .$$

Für diejenigen Oerter, die auf dem Aequator liegen ist $p = 0$, also immer $\cos s = 0$, $s = 90°$, also die Zeit vom Aufgange bis zum Untergange der Sonne beträgt sechs Stunden. Bezeichnet man die Schiefe der Ecliptik durch ε, und bedenkt, dass die grösste Declination der Sonne, der Schiefe der Ecliptik, sowohl positiv als negativ genommen, gleich ist, so werden die grössten und kleinsten Stundenwinkel beim Aufgange der Sonne durch

$$\cos s = - \tang \varepsilon . \tang p . \text{ und durch}$$
$$\cos s = + \tang \varepsilon . \tang p$$

gefunden werden, indem man in der vorigen Formel statt δ, $+ \varepsilon$ und $- \varepsilon$ setzt. Man sieht also, dass der längste Tag immer zur Zeit des Eintritts der Sonne in den Nullpunkt des Krebses, der kürzeste zur Zeit des Eintritts in den Nullpunkt des Steinbocks statt findet, weil zu diesen Zeiten die Sonne ihre grösste nördliche und ihre grösste südliche Declination erreicht hat. Auf der südlichen Erdhälfte findet das Gegentheil statt, da man für diese Gegenden p negativ nehmen muss, so dass die allgemeine Formel sich in

$$\cos s = + \tang \delta . \tang p$$

umändern.

§. 80.

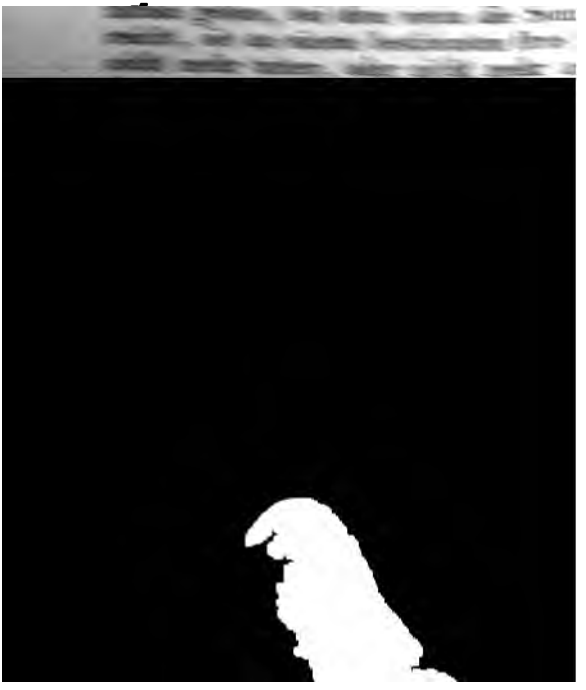
Den an den verschiedenen Oertern statt findenden Tageslängen zufolge, theilte man die Oberfläche der Erde ehedem in Climata ab, indem man für jede halbe Stunde der Zunahme des längsten Tages die Polhöhe p berechnete, und durch die zugehörigen Punkte auf der Oberfläche der Erde Parallelkreise zog.

hen zwei Parallelkreisen enthaltene Raum fläche der Erde wurde ein Clima genannt. zählte acht solcher Climaten, indem er lass über die Breite von 52° 8′ hinaus, die en der grossen Kälte nicht mehr bewohnbar lomäus nimmt deren dreizehn an bis zu ördlicher Breite. Diese Eintheilung ist an weiter gar keinen Nutzen, und wir wollen Uebersicht wegen, eine Tafel der Climaten Tageslänge von 24 Stunden beifügen, die Formel

$$tang\ p = -\cos s \cot \varepsilon$$

ist, wo s die durch die Multiplication mit de verwandelte, grösste halbe Tageslänge, Schiefe der Ecliptik 23° 27′ 33″ bedeutet.

ageslänge	12 St.	0′	Polhöhe	0°	0′
—	12.	30	—	8.	34.
—	13.	0	—	16.	44.
—	13.	30	—	24.	12.
—	14.	0	—	30.	49.
—	14.	30	—	36.	32.
—	15.	0	—	41.	24.
—	15.	30	—	45.	33.
—	16.	0	—	49.	3.
—	16.	30	—	52.	0.
—	17.	0	—	54.	31.
—	17.	30	—	56.	39.
—	18.	0	—	58.	28.
—	18.	30	—	60.	0.
—	19.	0	—	61.	19.
—	19.	30	—	62.	26.
—	20.	0	—	63.	23.
—	20.	30	—	64.	11.
—	21.	0	—	64.	50.
—	21.	30	—	65.	23.
—	22.	0	—	65.	51.
—	22.	30	—	66.	8.
—	23.	0	—	66.	22.
—	23.	30	—	66.	30.
—	24.	0	—	66.	32.



ezeichnet man die Länge der Sonne durch l, chiefe der Ecliptik durch ε, so hat man be-lich $\sin \delta = \sin l . \sin \varepsilon$
wenn man statt δ, $90 - p$ setzt, so wird
$\cos p = \sin l . \sin \varepsilon$
ler aus dieser Gleichung sich ergebende Werth , nämlich

$$\sin l = \frac{\cos p}{\sin \varepsilon}$$

den Ort, welchen die Sonne in der Ecliptik muss, damit sie an denjenigen Orte, dessen aphische Breite $= p$ ist, nicht mehr untergehe. Gleichung giebt zwei Werthe für l, den einen hen 0° und 90°, den andern zwischen 90° und der erste giebt die Stellung der Sonne an, wo nicht mehr unterzugehen anfängt; der zweite, ie nicht mehr unterzugehen aufhört. Nimmt z. B. $p = 80°$, so hat man

$l = 25° 52'$ und
$= 154° 8';$

iesen beiden Stellen der Ecliptik befindet sich die e am 15. April und am 27. August; während r Zeit geht also die Sonne unter 80° nördlicher e nicht unter.

len Anfang der Zeit, wo die Sonne immer über Horizont zu stehen anfängt.

Nimmt man hingegen $s = 0$, so wird aus der meinen Gleichung

$$\begin{aligned} \sin(90 + r' + 16) &= \cos\delta \cos p + \sin\delta \sin p \\ &= \cos(p - \delta) \text{ folglich} \\ 90 + r' + 16 &= p - \delta. \\ \delta &= -(90° - p + r + 16') \end{aligned}$$

für den Stand der Sonne

$$\sin l = -\frac{\cos(p - r - 16')}{\sin \varepsilon}$$

her dann statt findet, wenn die Sonne nicht mehr ngehen anfängt.

Die Strahlenbrechung und der Halbmesser der ıe haben also für den immerwährenden Tag die- : Wirkung, als ob die geographische Breite des s um $r + 16'$ grösser wäre; bei der fortwäh- en Nacht hingegen sind die durch diese Ursachen orgebrachten Veränderungen von der Beschaffen- , als ob der Ort um $r + 16'$ südlicher läge. Im era Falle kann diese Veränderung über 1½ Grad agen.

§. 87.

Die erste Beobachtung über die grosse Ungewiss- des Aufganges und Unterganges der Sonne in der en Zone wegen der ganz ausserordentlichen Strah-

[illegible]

§. 22.

Die mittlere Zenithdistanz findet man, indem die kleinste und grösste Zenithdistanz addirt, und die Summe halbirt wird

$$z = \frac{p - s}{2} + \frac{p + s}{2} = p.$$

[illegible] *Frühling* oder der *Herbst* an, wenn die *mittlere Zenithdistanz* der Sonne der Polhöhe gleich ist, zu dieser Zeit muss sie aber im Aequator sich befinden. Dieses ist der Fall wenn $\delta = 0$, und die Formel

$$\sin \delta = \sin l \sin \varepsilon,$$

[illegible] dass dann entweder $l = 0$, oder $l = 180°$ be- [illegible] In diesen Stellungen befindet sich die Sonne im Nullpunkt des Widders, und im Nullpunkt der [illegible] oder im Frühlingsaequinoctialpunkt und im [illegible] Aequinoctialpunkt.

[illegible] bis 90° nimmt die Declination der Sonne

ommer sind. Dies ergiebt sich leicht aus der htung der vorigen Formel

$$z = p - d,$$

uss man bemerken, dass in der südlichen Erd- die Breite p negativ genommen wird. tzt man also $p = -p'$, so dass p' eine wirk- ositive Grösse ist, so verändert sich für den h vom Aequator liegenden Theil der Erde vo- ormel in diese

$$z = -(p' + \delta)$$

a der Lage der Oerter in der gemässigten Zone e, p' immer grösser als ε, so wird, wenn wir statt δ seinen grössten negativen Werth $-\varepsilon$, $p' - \varepsilon$ positiv seyn, also die Zenithdistanz z v ausfallen. Da nun in der als Normalfall be- eten, nördlichen gemässigten Zone, die Ze- stanz südlich und positiv ist, so wird in der ien gemässigten Zone die Zenithdistanz der immer nördlich seyn.

§. 94.

Vir wollen als ein hierher gehöriges Beispiel rühlingsanfang im Jahre 1829 berechnen. ierzu entnehmen wir aus der Connoissance Tems auf das Jahr 1829 folgende zwei Decli- en, die wegen der sehr gleichförmigen Zunah- er Declination um die Zeit der Aequinoctien, chend sind

den 20. März $\delta = -0°\ 8'\ 38''$
— 21. — $\delta = +0°\ 15'\ 1''$.

ie Zeitpunkte, für welche diese Declinationen , sind die Durchgänge der Sonne durch den r Meridian. Der Unterschied beider Declina- beträgt $23'\ 39'' = 1419''$, und um den Früh- nfang, für welchen die Declination Null ist zu , braucht man nur die Proportion

$23'\ 39'' : 8'\ 38'' = 24\text{ St.} : x$
$1419 : 518 = 24\text{ St.} : x.$

s ergiebt sich aus dieser Proportion

$x = 8\text{ St. } 45'\ 40''$

vird der Frühlingsanfang zu Paris am 20. März 45' 40" Nachmittags wahre Zeit statt finden.

Die hinzuzusetzende Zeitgleichung beträgt 7′ 35″, also tritt der Frühling um 8 Uhr 53′ 15″ mittlere Zeit ein. Da Göttingen in Zeit 30′ 25″ östlicher liegt, so wird man in Göttingen beim Eintritte des Frühlings 9 Uhr 23′ 40″ Abends zählen. Der Meridian, in welchem die Sonne zur Zeit des Frühlingsanfangs tritt, liegt in Zeit 8 St. 45′ 40″ westlicher als Paris, oder in Bogen ausgedrückt, indem man mit 15 multiplicirt, 131° 25′ westlich von Paris, oder wenn man 20° abzieht, in 91° 25′ westlicher Länge von Ferro.

§. 95.

Bei der Berechnung des Sommer- oder Winteranfangs, muss man wegen der ungleichförmigern Bewegung in Declination zur Zeit der Solstitien, mehr als zwei Declinationen nehmen. Wir wollen daher den Anfang des Sommers für das Jahr 1829 berechnen. In der Connoissance des tems findet man folgende Declination der Sonne

d. 20. Juni $\delta = +\ 23°\ 27'\ 13''$
d. 21. — $\delta = +\ 23°\ 27'\ 32''$
d. 22. — $\delta = +\ 23°\ 27'\ 26''$

wo die Declinationen eben so wie vorher beim Durchgange der Sonne durch den Pariser Meridian gelten. Man setze nun

$$\delta = A + Bt + Ct^2$$

wo t die seit dem am 21. Juni statt findenden Durchgang der Sonne durch den Meridian, verflossene Zeit in Tagen ausgedrückt, bedeutet. Man hat also zur Bestimmung der drei Coefficienten A, B, C die drei Gleichungen

$$23°\ 27'\ 13'' = A - B + C.$$
$$23°\ 27'\ 32'' = A$$
$$23°\ 27'\ 26'' = A + B + C.$$

indem man beim 20. Juni $t = -1$, und beim 22. Juni $t = +1$ setzt. Aus denselben ergiebt sich

$$A = 23°\ 17'\ 32''$$
$$B = +\ 6''\ 5.$$
$$C = -\ 12''\ 5.$$

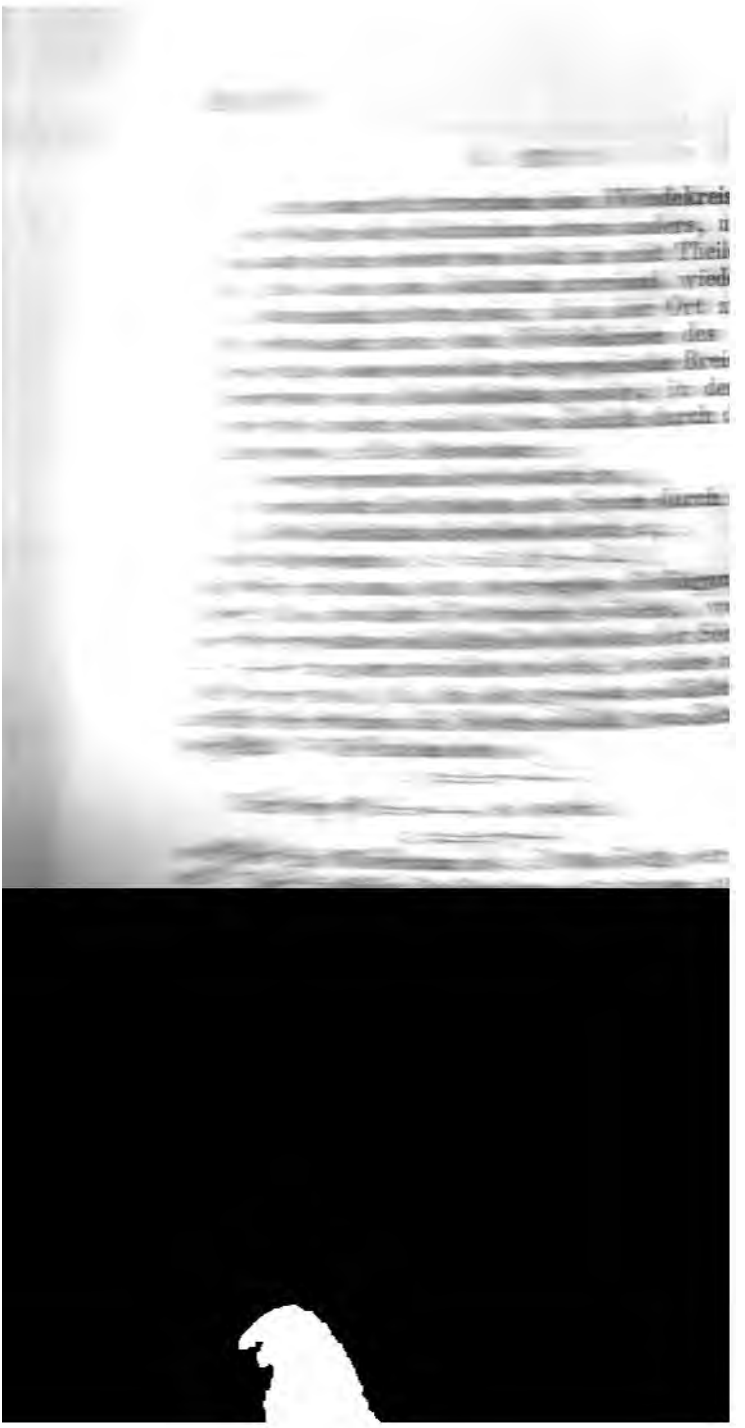
also $\delta = 23°\ 27'\ 32 + 6''\ 5\ t - 12,5\ t^2$.

$= \frac{\quad}{250} = 6$ St. 14′ 24″

le hiernach das Sommersolstitium zu Paris
ni 6 Uhr 14′ 24″ wahrer Zeit eintreten.

§. 96.

en der geringen Aenderung der Declination
der Solstitien ist aber diese Bestimmungsart
genau, und man wird besser thun sich bei
tersuchung der Länge der Sonne zu bedie-
n findet aus der Connoissance de tems
Juni Länge d. ☉ = 89° 45′ 2″
— — — — = 90° 42′ 15″
u den Zeiten der Sonnenstillstände die Be-
n der Länge sehr gleichförmig ist, so sind
en Längen hinreichend, um den Anfang des
oder den Zeitpunkt, in welchem die Länge
e 90° beträgt, genau zu bestimmen. Die
beider Längen ist
57′ 13″ = 3433″;
rschied der Länge der Sonne am 21. Juni
n Mittag bis zu 90 Grad
14′ 58″ = 898″.
hat daher die Proportion
3433″ : 898 = 24 St. x
us ergiebt sich
$= \frac{898 \cdot 24}{3433} = 6$ St. 16′ 40″,



nördliche Declination der Sonne nimmt zu, ε, dann wird

$$z = p - \varepsilon = -(\varepsilon - p).$$

Zenithabstand nördlich, und der Winter ieder an.

ischen der Zenithdistanz $= 0$, und $= -(\varepsilon - p)$ r den Herbstanfang die mittlere

$$= -\frac{\varepsilon - p}{2}$$

der Declination

$$\delta = \frac{p + \varepsilon}{2}$$

ht. Indem also die Sonne vom Wendekreise nbocks zum Wendekreise des Krebses überldet sie schon vier Jahrszeiten, und während ırückkehrens bildet sie dieselben noch einmal.

h den verschiedenen Declinationen geordnet, lso in den Gegenden zwischen dem Aequator n Wendekreise des Krebses, die Jahrszeiten inander:

$\delta = -\varepsilon$	Wintersanfang
$\delta = -\frac{\varepsilon - p}{2}$	Frühlingsanfang.
$\delta = p.$	Sömmersanfang
$\delta = \frac{p + \varepsilon}{2}$	Herbstanfang.
$\delta = +\varepsilon$	Wintersanfang
$\delta = \frac{p + \varepsilon}{2}$	Frühlingsanfang.
$\delta = p.$	Sommersanfang
$\delta = -\frac{\varepsilon - p}{2}$	Herbstanfang.

Sonne geht also zweimal des Jahrs durch ith, welcher Zeitpunkt zugleich den Anfang mers bezeichnet.

diejenigen Oerter, welche jenseits zwischen uator und dem Wendekreise des Steinbocks ndet man die Folge der Jahrszeiten, indem ler vorigen Tabelle, den Sommer mit dem den Herbst mit dem Frühling, vertauscht.

Diese Eigenschaft der Luft bemerkt man
am Tage, indem die Oerter, nach wel-
onne ihre Strahlen wegen dazwischen lie-
genständen, nicht schicken kann, doch sehr
und die an diesen Oertern vorhandene Hel-
ann durch nichts anderes hervorgebracht
durch das von der Atmosphäre zerstreuete
ckgeworfene Licht, obgleich auch andere
de zur Zurückwerfung noch beitragen kön-
ausführlichere Erklärung, wie die Sonnen-
in der Atmosphäre gebrochen und zurückge-
erden, wird in dem physischen Theile ab-
werden.

§. 100.

Zeitpunkt, in welchem die völlige Dunkel-
itt, d. h. wenn die Dämmerung so abge-
hat, dass die Sterne von der sechsten Grösse
en Auge sichtbar werden, macht das Ende
onomischen Dämmerung aus. Um denselben
mitteln hat man verschiedene Mal Beobach-
gestellt, und gefunden, dass im Mittel die
Sonne unter dem Horizont 18°, oder ihre
tanz 108° betragen muss, wenn die angege-
cheinung eintreten soll. Alhazen nimmt
der Sonne unter dem Horizont 19°, Nu-
Cassini 15°, Frisius 18°, Tycho de
7°. Brandes hat in Breslau $17\frac{1}{2}°$ bis $17\frac{1}{2}°$

§. 98.

Als ein Beispiel wollen wir die geographis Breite des Ortes $\rho = 15°$ nehmen, und $\varepsilon = 23°$ setzen, welches zu der angeführten Berechnung Anfangs der Jahrszeiten auf den Tag überflüssig nau ist. Um nun die den angegebenen Declinatio entsprechenden Längen der Sonne zu finden, bedi man sich der Formel

$$\sin l = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}$$

und man erhält für die Declinationen

$\delta = -23° 28'$	$l = 270°$
$\delta = -4° 14'$	$l = 349°$
$\delta = +15° 0'$	$l = 40°$
$\delta = +19° 14'$	$l = 56°$
$\delta = +23° 28'$	$l = 90°$
$\delta = +19° 14'$	$l = 124°$
$\delta = +15° 0'$	$l = 140°$
$\delta = -4° 14'$	$l = 191°$

folglich

Anfang	des	Winters	den 21. December
—	—	Frühlings . . .	— 9. März
—	—	Sommers . . .	— 1. May
—	—	Herbstes . . .	— 17. May
—	—	Wintees . . .	— 21. Juni
—	—	Frühlings . . .	— 27. Juli
—	—	Sommers . . .	— 13. August
—	—	Herbstes . . .	— 4. October.

Von der Dämmerung.

§. 99.

Wenn auch die Sonne nicht mehr ihren St über dem Gesichtskreise hat, so findet doch i immer eine bedeutende Helligkeit statt, die nach nach sich verringert und zuletzt in völlige Dun heit übergeht. Man nennt diese Helligkeit die D merung, und zwar die vor Sonnenaufgang statt dende, die Morgendämmerung, die nach Sonnei tergang vorhandene, die Abenddämmerung.

Dämmerung wird von der Luft hervorgebracht, welche, wie jeder andere Körper, die Eigenschaft hat das Licht zurückzuwerfen, so dass, wenn auch die Oberfläche der Erde an einem bestimmten Orte nicht mehr direct von den Sonnenstrahlen erreicht werden kann, doch noch die darüber befindlichen Luftschichten von der Sonne Licht erhalten und es uns zurückwerfen. Diese Eigenschaft der Luft bemerkt man auch schon am Tage, indem die Oerter, nach welchen die Sonne ihre Strahlen wegen dazwischen liegenden Gegenständen, nicht schicken kann, doch sehr hell sind, und die an diesen Oertern verhandene Helligkeit kann durch nichts anderes hervorgebracht seyn, als durch das von der Atmosphäre zerstreuete und zurückgeworfene Licht, obgleich auch andere Gegenstände zur Zurückwerfung noch beitragen können. Die ausführlichere Erklärung, wie die Sonnenstrahlen in der Atmosphäre gebrochen und zurückgeworfen werden, wird in dem physischen Theile abgehandelt werden.

§. 100.

Der Zeitpunkt, in welchem die völlige Dunkelheit eintritt, d. h. wenn die Dämmerung so abgenommen hat, dass die Sterne von der sechsten Grösse dem blossen Auge sichtbar werden, macht das Ende der astronomischen Dämmerung aus. Um denselben auszumitteln hat man verschiedene Mal Beobachtungen angestellt, und gefunden, dass im Mittel die Tiefe der Sonne unter dem Horizont 18°, oder ihre Zenithdistanz 108° betragen muss, wenn die angegebene Erscheinung eintreten soll. Alhazen nimmt die Tiefe der Sonne unter dem Horizont 19°, Nunez 16°, Cassini 15°, Frisius 18°, Tycho de Brahe 17°. Brandes hat in Breslau $17\frac{1}{4}°$ bis $17\frac{1}{2}°$ beobachtet. Ausser der astronomischen Dämmerung hat man auch noch die bürgerliche Dämmerung, welche dann sich endigt, sobald man ohne künstliche Erleuchtung in den Zimmern gewöhnliche Schrift nicht mehr lesen kann. Obgleich hierbei viel auf die Lage des Zimmers rücksichtlich der Himmelsgegend und der umgebenden Gegenstände, so wie auf den

Zustand des Himmels ankommt, so kann man doch bei nicht zu ungünstigen Umständen annehmen, dass diese bürgerliche Dämmerung sich endet, sobald die Sonne eine Tiefe von $6\frac{1}{2}$ Grad unter dem Horizont erreicht hat.

§. 101.

Bezeichnet man durch p die Polhöhe des Ortes, durch δ die Declination der Sonne, durch s den Stundenwinkel, und durch z die Zenithdistanz, so hat man

$$\cos z = \sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p \cos s.$$

und wenn zwei andere Zenithdistanzen z', z'' gegeben sind, die den Stundenwinkeln s', s'' entsprechen, so erhält man ebenfalls die beiden Gleichungen

$$\cos z' = \sin\delta . \sin p + \cos\delta . \cos p \cos s'$$
$$\cos z'' = \sin\delta . \sin p + \cos\delta . \cos p . \cos s''.$$

Setzt man nun

$$z' = 90°,\ z'' = 108°,$$

so kann man die beiden entsprechenden Stundenwinkel

$$\cos s' = -\tang\delta . \tang p.$$

$$\cos s'' = \frac{\cos 108 - \sin\delta \sin p.}{\cos\delta \cos p}$$

berechnen; dann giebt s' den Stundenwinkel beim Untergange der Sonne, s'' den beim Ende der astronomischen Dämmerung, folglich der in Zeit ausgedrückte Unterschied derselben $= s'' - s'$, die Länge der Dämmerung. Nimmt man ferner noch

$$\cos s''' = \frac{\cos 96\frac{1}{2} - \sin\delta \sin p.}{\cos\delta \cos p.}$$

so giebt der in Zeit verwandelte Unterschied $s''' - s'$ die Länge der bürgerlichen Dämmerung.

§. 102.

Man kann den Unterschied $s'' - s'$ durch eine einzige Formel finden, indem man die beiden Gleichungen

$$0' = \sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p . \cos s'$$
$$\cos z'' = \sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p . \cos s''$$

zu einander addirt, und auch von einander subtrahirt. Auf diese Weise finden sich zwei neue Formeln

lässt zugleich die in du multiplicirten Glieder weg, so erhält man:

$$0 = \cos\delta \sin p - \sin\delta \cos p \cos u \cos v - \cos\delta \cos p \cos u \sin v \frac{dv}{d\delta}.$$

$$0 = \sin\delta \cos p \sin u \sin v - \cos\delta \cos p \sin u \cos v \frac{dv}{d\delta}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Differentialgleichungen durch $\sin u \cos v$, die zweite durch $\cos u \sin v$, und zieht beide von einander ab, so fällt das Differentialverhältniss $\frac{dv}{d\delta}$ heraus, und man findet;

$$0 = \cos\delta \sin p \cos v \sin u - \sin\delta \cos p \cos u \sin u \cos v^2 - \sin\delta \cos p \sin u \cos u \sin v^2$$

oder wenn man die beiden letzten Glieder zusammensieht und durch $\sin u$ dividirt

3) $0 = \cos\delta \sin p \cos v - \sin\delta \cos p \cos u.$

Die Gleichungen (2) und (3) geben wenn sie quadrirt werden,

$$\sin u^2 = \frac{\cos z^2}{4\cos\delta^2 \cos p^2 \sin v^2}.$$

$$\cos u^2 = \frac{\cos\delta^2 \sin p^2 \cos v^2}{\sin\delta^2 \cos p^2}$$

folglich wenn man dieselben zusammenaddirt,

4) $4\cos\delta^2 \sin\delta^2 \cos p^2 \sin v^2 = \cos z''^2 \sin\delta^2 + 4\cos\delta^4 \sin p^2 \cos v^2 \sin v^2.$

Multiplicirt man die Gleichung (3) durch $\cos v$, so wird

$$\cos u \cos v = \frac{\cos\delta \sin p \cos v^2}{\sin\delta . \cos p}$$

und da aus (1)

$$\cos u \cos v = \frac{\cos z'' - 2\sin\delta . \sin p}{2\cos\delta \cos p}$$

so wird auch

5) $\frac{\cos\delta \sin p \cos v^2}{\sin\delta} = \frac{\cos z'' - 2\sin\delta \sin p.}{2\cos\delta}$ also

$$\cos v^2 = \frac{\cos z'' \sin\delta - 2\sin\delta^2 \sin p}{2\cos\delta^2 \sin p}$$

Nun ist aber

$$a + b = \cos\delta^2 \cos p^2 - \sin\delta^2 s$$
$$= \cos(p-\delta)\cos(p+\delta)$$

und da auch

$$(a + b)^2 - a\cos z''^2$$
$$= (a+b+\cos z''\sqrt{}$$
$$\cos z''\sqrt{a} = \cos\delta\cos p\cos z''$$
$$a+b+\cos z''\sqrt{a} = \cos(p-\delta)$$
$$+ \cos z''[\sin$$
$$= \cos(p-\delta)\cos(p+\delta) + c$$
$$= 2\cos(p-\delta)\cos\frac{p+\delta+z''}{2}.$$

und $a + b - \cos z''\sqrt{a}$

$$= 2\cos(p+\delta)\sin\frac{p-\delta+}{2}$$

so wird die unter dem Wurzelze

$$ac + bb = 4\cos(p-\delta)\cos(p+$$
$$\times \cos\frac{p+\delta-z''}{2}.\ \sin\frac{p-\delta-}{2}$$

§. 103.

Wir wollen nun untersuche
die Sonne haben muss, damit

zugleich die in du multiplicirten Glieder weg, rhält man :

$$0 = \cos\delta \sin p - \sin\delta \cos p \cos u \cos v - \cos\delta \cos p \cos u \sin v \frac{dv}{d\delta}.$$

$$0 = \sin\delta \cos p \sin u \sin v - \cos\delta \cos p \sin u \cos v \frac{dv}{d\delta}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Differentialglei- igen durch $\sin u \cos v$, die zweite durch $\cos u \sin v$, zieht beide von einander ab, so fällt das Diffe- ialverhältniss $\frac{dv}{d\delta}$ heraus, und man findet;

$$= \cos\delta \sin p \cos v \sin u - \sin\delta \cos p \cos u \sin u \cos v^2 - \sin\delta \cos p \sin u \cos u \sin v^2$$

wenn man die beiden letzten Glieder zusammen- t und durch $\sin u$ dividirt

$$0 = \cos\delta \sin p \cos v - \sin\delta \cos p \cos u.$$

Die Gleichungen (2) und (3) geben wenn sie qua- t werden,

$$\sin u^2 = \frac{\cos z^2}{4\cos\delta^2 \cos p^2 \sin v^2}.$$

$$\cos u^2 = \frac{\cos\delta^2 \sin p^2 \cos v^2}{\sin\delta^2 \cos p^2}$$

ich wenn man dieselben zusammenaddirt,

$$4\cos\delta^2 \sin\delta^2 \cos p^2 \sin v^2 = \cos z''^2 \sin\delta^2 + 4\cos\delta^4 \sin p^2 \cos v^2 \sin v^2.$$

Multiplicirt man die Gleichung (3) durch $\cos v$, wird

$$\cos u \cos v = \frac{\cos\delta \sin p \cos v^2}{\sin\delta . \cos p}$$

da aus (1)

$$\cos u \cos v = \frac{\cos z'' - 2\sin\delta . \sin p}{2\cos\delta \cos p}$$

wird auch

$$\frac{\cos\delta \sin p \cos v^2}{\sin\delta} = \frac{\cos z'' - 2\sin\delta \sin p.}{2\cos\delta}$$ also

$$\cos v^2 = \frac{\cos z'' \sin\delta - 2\sin\delta^2 \sin p}{2\cos\delta^2 \sin p}$$

$$\sin v^2 = \frac{2\sin p - \cos z'' \sin \delta}{2\cos \delta^2 \sin p}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\cos v^2$ und $\sin v^2$ in (4) so kommt

$$(2\sin p - \cos z'' \sin \delta)(2\sin \delta - \cos z'' \sin p) = \cos z''^2 \sin \delta \sin p.$$

oder wenn man das Product entwickelt

$$2\sin \delta \sin p - \sin p^2 \cos z'' - \cos z'' \sin \delta^2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin \delta = \frac{\sin p(1 - \sin z'')}{\cos z''}$$

$$= \frac{\sin p\ (1 - \sin 108°)}{\cos 108°} = \frac{\sin p\ (1 - \sin 72°)}{-\cos 72°}.$$

Es findet daher die kürzeste Dämmerung immer bei einer südlichen Declination der Sonne statt, so lange die geographische Breite p nördlich ist.

Man kann die Formel auch noch für die numerische Berechnung etwas besser darstellen; denn man hat

$$1 - \sin 72° = (\cos 36° - \sin 36°)^2$$
$$\cos 72° = (\cos 36°)^2 - (\sin 36°)^2$$

folglich

$$\frac{1 - \sin 72°}{\cos 72°} = \frac{\cos 36° - \sin 36°}{\cos 36° + \sin 36°}$$

$$= \frac{1 - \tang 36°}{} = \frac{\sin 9°}{} = \tang 9°$$

Diese Declination hat die Sonne am 2. März und m 11. October.

$$\begin{aligned} tang\,\delta &= 9.09691\,n \\ -tang\,p &= 0.09991\,n \\ \hline cos\,s' &= 9.19682 \\ s'' &= 80°\ 56'\ 50'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sin\,\delta &= 9.09346\,n & cos\,\delta &= 9.99663. \\ sin\,p &= 9.89375 & cos\,p &= 9.79383 \\ \hline & 8.98721\,n. & & 9.79046 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -0{,}09710 \\ cos\,108° = & -0{,}30902 \\ \hline & -0{,}21192 \\ & 9.32617\,n. \\ & 9.79046. \\ \hline cos\,s'' = & 9.53571\,n, \end{aligned} \qquad s'' = 110°.\ 4'.\ 50''.$$

folglich $s'' - s' = 29°\ 8'$, oder in Zeit 1 St. 57', welches für die angegebene Polhöhe die kleinste Dauer der Dämmerung ist.

§. 105.

Bei dieser Auflösung der Aufgabe über die kleinste Dauer der Dämmerung haben wir die Refraction, so wie die Aenderung der Declination der Sonne, während sie sich vom Horizont bis zu 18° Tiefe bewegt, ganz vernachlässigt. Man kann diese kleinen Grössen aber um so eher vernachlässigen, da dieselben in bei weitem engern Gränzen eingeschlossen liegen, als die Ungewissheit der Tiefe der Sonne unter em Horizont beim Ende der Dämmerung, da man den vorigen Angaben §. 100. sieht, dass die Beichtungen um 4° von einander differiren. Berlli hat sich fünf Jahr mit der Auflösung dieser e beschäftigt.

§. 106.

Kann die Dauer der Dämmerung für jede on der Sonne auf folgende Art sehr l

näherungsweise bestimmen. Man setze in der Formel (§. 102.)

$$\cos\delta^2 \cos p^2 \sin\tfrac{1}{2}(s''-s')^2 \cos\tfrac{1}{2}(s''-s')^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos z''^2 \cos\tfrac{1}{2}(s''-s')^2$$
$$+ \sin\tfrac{1}{2}(s''-s')^2 [\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta \sin p]^2.$$

da $\frac{1}{2}(s''-s')$ ziemlich klein ist, statt des Sinus den Bogen selbst, indem man die Potenzen welche das Quadrat übersteigen weglässt. Setzt man dann

$$\tfrac{1}{2}(s''-s') = y, \text{ so wird}$$
$$yy(\cos\delta^2 \cos p^2 + \tfrac{1}{2}\cos z''^2 - (\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta \sin p)^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos z''^2.$$

Der Factor von yy lässt sich auch so schreiben:

$$\cos(p-\delta)\cos(p+\delta) + \cos z'' \sin\delta \sin p.$$

folglich wird

$$2y = \frac{-\cos z''}{\sqrt{\cos(p-\delta)\cos(p+\delta) + \cos z'' \sin\delta . \sin p}}.$$

Will man die Dauer in Zeitminuten haben, so muss man noch den hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Bruch mit $\frac{206265}{15.60}$ multipliciren, so dass also der constante Factor

$$= -\frac{206265}{900}\cos z''$$

wird. Dies beträgt 70′82, wovon der Logarithme $= 1.85016$ ist.

in demjenigen Tage zum erstenmale, an welchem
$90° - \delta - p = 18°$.
un ist der grösste Werth von $\delta = 23° 28'$,
nuss die geographische Breite der Oerter, wo
Erscheinung noch eintreten soll, grösser als 48°
yn, und unter dieser Breite wird blos am läng-
Tage die immerwährende Dämmerung statt fin-
Für jede grössere Breite tritt die immerwäh-
Dämmerung ein, wenn die Declination vor
ängsten Tage 72° — Breite des Ortes ist, und
det, wenn die Sonne dieselbe Declination nach
ängsten Tage erreicht hat. Dies findet in Göt-
ı statt vom 22. May bis zum 21. Juli.

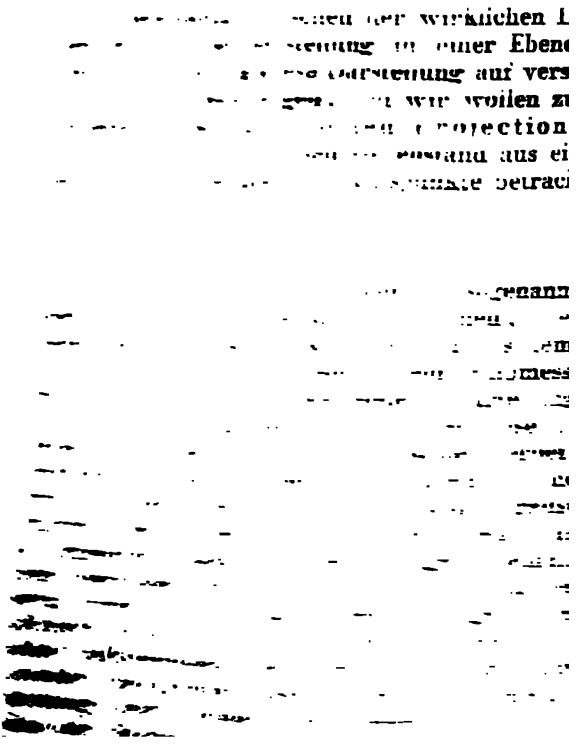
Unter	50°	Breite	vom	1. Juni	bis	12. Juli
—	51°	—	—	25. May	—	18. —
—	52°	—	—	20. —	—	23. —
—	53°	—	—	16. —	—	28. —
—	55°	—	—	8. —	—	5. August
—	57°	—	—	1. —	—	12. —
—	60°	—	—	21. April	—	21. —
—	65°	—	—	7. —	—	5. Septbr.
—	70°	—	—	25. März	—	18. —
—	80°	—	—	28. Febr.	—	14. October
—	90°	—	—	29. Jan.	—	13. Novbr.

Man sieht hieraus, dass auf dem Pol der Erde
ge Dunkelheit nur vom 13. November bis zum
anuar, also während 11 Wochen statt findet.

ı den Darstellungen der Oberfläche der rde, oder den geographischen Charten.

§. 108.

Die Darstellung der Oberfläche der Erde in einer
ne würde keine Schwierigkeit haben, wenn die
e eine Ebene wäre, oder selbst wenn sie eine
rfläche hätte die sich in eine Ebene abwickeln
se, (eine developpable Oberfläche), wie z.
eine Kegel - oder Cylinderfläche; allein da die



: werden. Diese Gesichtslinien treffen die ange-
lene Ebene in Punkten, welche die Projectionen
virklichen Oerter sind, und die Darstellung der
berfläche in einer Ebene oder die geographischen
r ausmachen.

§. 110.

Es kommt nun blos auf die gehörige Lage des
npunktes und der Projectionsebene an, um die
tructionen so einfach als möglich zu machen.
llgemeinen wendet man vorzüglich dreierlei Ar-
on Lagen an, welche die orthographische,
eographische und centrale Projectionsart
achen. Bei der orthographischen Projectionsart
t man die Projectionen der Oerter auf der Ku-
indem man von denselben auf die Ebene Perpen-
herabfällt, so dass diese Methode mit der ge-
lichen geometrischen Projectionsart überein-
nt. Man sieht leicht, dass rücksichtlich der Lage
ugenpunktes, diese Projectionsart eine unend-
Entfernung desselben von der Kugel voraussetzt,
le Gesichtslinien einander parallel werden. Die
ographische Projectionsart setzt voraus, dass der
npunkt sich in der Oberfläche der Kugel befin-
und dass die Projectionsebene durch den Mittel-
t der Erde geht. Nimmt man den Augenpunkt
Mittelpunkte der Erde an, und legt die Projec-
ebene als Berührungsebene an die Kugel, so er-
man die Centralprojection. Letztere wird vor-
ich bei Abbildung kleiner Theile der Erdober-
e gebraucht. Die stereographische und orthogra-
che Projection kann entweder Polar oder Aequa-
al seyn, je nachdem das Auge in der Erdaxe oder
r Verlängerung, oder in der Ebene des Aequa-
liegt.

§. 111.

Aufgabe. Die orthographische Polarpro-
tion der Erdkugel zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die Breite eines
s durch p, die Länge desselben durch l, lege

durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht auf die Axe derselben die Projectionsebene, und fälle auf diese Ebene von dem angegebenen Orte einen Perpendikel; sein Fusspunkt giebt den projicirten Ort an. Um dessen Lage zu bestimmen, setze man seine beiden Coordinaten x und y die vom Mittelpunkte der Erde aus gezählt werden, so dass die Abscissenlinie oder die Axe der x, durch den Mittelpunkt der Erde, und die Projection eines im ersten Meridiane liegenden Punktes geht. Man hat dann, wenn man durch r den Halbmesser der Kugel bezeichnet

$$x = r \cos l \cos p$$
$$y = r \sin l \cos p.$$

Setzt man die Breite der Oerter constant, so liegen alle diese auf einem Parallelkreise, und man findet, indem aus beiden Gleichungen der Länge l eliminirt wird

$$xx + yy = rr \cos p^2,$$

folglich sind die Projectionen der Parallelkreise auch wieder Kreise, und der der Breite p correspondirende hat den Halbmesser $r \cos p$.

Eliminirt man den Winkel p, so wird

$$y = x \operatorname{tang} l.$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die mit der Abscissenlinie den Winkel l macht; es sind daher die Projectionen der Meridiane gerade Linien.

§. 112.

Aufgabe. Die orthographische Aequatorealprojection zu finden.

Auflösung. Man lege die Projectionsebene durch die Pole der Erdkugel so, dass sie dieselbe in demjenigen Meridian schneidet, den man für den ersten angenommen hat. Die Erdaxe nehme man als Abscissenlinie an, und darauf senkrecht durch den Mittelpunkt der Erde die Axe der y; man hat dann

$$x = r \sin p$$
$$y = r \cos p. \cos l.$$

Aus der Gleichung $x = r \sin p$ sieht man, dass die Projection der Parallelkreise eine gerade Linie wird, die von der den Aequator vorstellenden geraden Linie den Abstand $r \sin p$ hat.

Wenn man aus den beiden Gleichungen die Grösse p eliminirt, so erhält man eine Gleichung für die Projection der Meridiane

$$yy + xx \cos l^2 = rr \cos l^2,$$

folglich sind die Projectionen der Meridiane Ellipsen, deren halbe grosse Axe $= r$, und halbe kleine Axe $= r \cos l$ ist.

§. 113.

Aufgabe. Die stereographische Polarprojection zu finden.

Auflösung. Man lege die Projectionsebene so wie bei der orthographischen Polarprojection durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht auf ihre Axe, so dass sie die Aequatorsebene bildet, setze den Augenpunkt in einen der Pole, z. B. den Südpol, und lege die Abscissenlinie so, dass dieselbe durch den Mittelpunkt der Erde und die Projection eines im ersten Meridian liegenden Punktes geht. Zieht man nach irgend einem Punkte der Oberfläche der Erde dessen Breite $= p$ ist, eine Gesichtslinie, so macht diese mit der Erdaxe einen Winkel der dem halben Complement der geographischen Breite gleich ist, also $= 45 - \frac{1}{2} p$; da nun die Entfernung des Auges von der Projectionsebene dem Halbmesser der Kugel gleich ist, welche wir durch r bezeichnen, so wird die Entfernung des Durchschnittspunktes der Gesichtslinie mit der Projectionsebene vom Mittelpunkte, oder dem Anfangspunkte der Coordinaten durch

$$r \cdot tang(45 - \tfrac{1}{2} p)$$

ausgedrückt werden, folglich sind die Projectionen der Parallelkreise selbst Kreise. Will man die Projection für südliche geographische Breite haben, so hat man in der vorigen Formel nur statt $+ p$, $- p$ zu setzen. Legt man ferner durch einen Meridian und den Mittelpunkt der Erde eine Ebene, so fallen alle nach den auf diesem Meridian liegenden Oertern gezogene Gesichtslinien in diese Ebene, und da der Durchschnitt dieser Ebene mit der Projectionsebene eine gerade Linie ist, so folgt, dass die Projection jedes Meridians eine gerade Linie seyn wird, die

en Ort der Kugel, der ungefähr in der Mitte des projicirenden Stückes liegt. Die geographische ite dieses Ortes sey p', und den hindurchgehenden eridian kann man für den ersten nehmen. Ein je- r Meridian liegt in einer Ebene die durch zwei nkte des Meridians und den Mittelpunkt der Erde , und da in diesem Punkte zugleich das Auge t, so werden die Projectionen der Meridiane gera- Linien bilden, welche sich auf der Projections- ne in demjenigen Punkte schneiden, der die Pro- tion des Pols ausmacht. Wir wollen die Projec- n des ersten Meridians, der durch den Berüh- ngspunkt geht, als die Abscissenlinie betrachten, d den Anfang der Coordinaten in den Berührungs- nkt vorlegen. Nehmen wir nun einen andern rt auf der Oberfläche der Kugel an, dessen geogra- sche Breite p und Länge l ist, und bezeichnen den inkel, den die nach diesem Ort aus dem Mittel- nkte der Erde mit der nach dem Berührungspunkte ogenen Linie macht, durch φ, und den Winkel elchen der durch diese beiden Oerter gelegte grös- Kreis mit den ersten Meridian macht, durch μ, o sieht man leicht, dass

$$x = r \; tang \varphi \; cos \mu, \qquad y = r \; tang \varphi \; sin \mu$$

yn muss. Es ist aber auch

$$cos \varphi = sin \, p \; sin \, p' + cos \, p \; cos \, p' \; cos \, l.$$

$$sin \mu = \frac{cos \, p \; sin \, l}{sin \varphi}.$$

Hieraus folgt,

$$sin \, l = \frac{sin \mu . \; sin \varphi .}{cos \, p.}, \quad cos \, l = \frac{cos \varphi - sin \, p. \; sin \, p'}{cos \, p \; cos \, p'}.$$

Quadrirt man beide Gleichungen und addirt sie usammen, so wird

$$cos \, p^2 \; cos \, p'^2 = cos \varphi^2 - 2 cos \varphi \; sin \, p \; sin \, p' + sin \, p^2 \; sin \, p'^2 + sin \, \mu^2 \; sin \varphi^2 \; cos \, p'^2.$$

tatt $cos \, p^2 \; cos \, p'^2$ setze man

$$1 - sin \, p^2 - sin \, p'^2 + sin \, p^2 \; sin \, p'^2.$$

wird

$$1 - sin \, p^2 - sin \, p'^2 = cos \varphi^2 - 2 cos \varphi \; sin \, p \; sin \, p' + sin \, \mu^2 \; sin \varphi^2 \; cos \, p'^2, \text{ oder auch}$$

$$sin \, p^2 - 2 cos \varphi \; sin \, p \; sin \, p' = 1 - cos \varphi^2 - sin \, p'^2 - sin \, \mu^2 \; sin \varphi^2 \; cos \, p'^2.$$

Addirt man auf beiden Seiten $\cos\varphi^2 \sin p'^2$, so kann man die Gleichung auch so schreiben

$$\sin p^2 - 2\cos\varphi \sin p \sin p' + \cos\varphi^2 \sin p'^2 = \sin\varphi^2 - \sin p'^2 + \cos\varphi^2 \sin p'^2 - \sin\varphi^2 \cos p'^2 + \cos\mu^2 \sin\varphi^2 \cos p'^2.$$

Es ist aber

$$\sin\varphi^2 - \sin p'^2 + \cos\varphi^2 \sin p'^2 - \sin\varphi^2 \cos p'^2 = 0$$

also $\sin p = \cos\varphi \sin p' + \sin\varphi \cos p' \cos\mu$.

Aus den beiden Gleichungen

$x = r \operatorname{tang}\varphi \cos\mu$, $\quad y = r \operatorname{tang}\varphi \sin\mu$.

erhält man

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{rr}{rr + xx + yy}}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{xx + yy}{rr + xx + yy}}$$

$$\cos\mu = \frac{x}{\sqrt{xx + yy}}$$ folglich wenn diese Werthe in vorige Formel substituirt werden, so kommt

$$\sin p \sqrt{rr + xx + yy} = r \sin p' + \cos p'.\ x \text{ oder}$$

$$\sin p^2\, yy = xx(\cos p'^2 - \sin p^2) + rr(\sin p'^2 - \sin p^2) + 2rx \sin p' \cos p'.$$

Dies ist die Gleichung der Projection eines Parallelkreises, und man sieht daraus, dass dieselbe im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist. Um die Natur derselben etwas genauer zu untersuchen, wollen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in denjenigen Punkt verlegen, in welchem die krumme Linie die Abscissenlinie trifft.

Man bezeichne diesen Werth von x durch ξ, so hat man zur Bestimmung dieser Grösse, weil $y = 0$ wird $0 = \xi\xi(\cos p'^2 - \sin p^2) + rr(\sin p'^2 - \sin p^2) + 2r\xi \sin p' \cos p'$.

Zieht man diese Gleichung von der obern ab, und setzt $x - \xi = t$, so wird

$$yy \sin p^2 = (t + 2\xi)\, t\, (\cos p'^2 - \sin p^2) + 2tr \sin p' \cos p'.$$

Die Gleichung für ξ giebt

$$\xi(\cos p'^2 - \sin p^2) + r \sin p' \cos p' = \pm r \sin p \cos p.$$

also $$\xi = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\sin 2p' \pm \sin 2p}{\cos p'^2 - \sin p^2}.$$

it dieses Werthes von ς kommt

$$\sin p^2 = 2tr\,[\sin p'\cos p' + \sin(p-p')\cos(p+p')] + tt\cos(p+p')\cos(p-p')$$

man weiss, dass die Natur des Kegelschnitts von dem Coefficienten von tt abhängt.

ist $p + p' > 90°$, so wird der Coefficient negativ, also die Projection eine Ellipse; ist $p + p'$ $= 90°$, so wird sie eine Hyperbel, wenn $p + p' = 90°$ wird sie eine Parabel. Ein Kreis entsteht, wenn

$$\cos(p + p')\cos(p - p') = -\sin p^2$$

dies $p' = 0$, d. h. $p' = 90°$ ist. In diesem Falle muss die Projectionsebene den Pol berühren.

§. 116.

Eine der merkwürdigsten Linien auf der Oberfläche der Erde ist die in der Schifffarth nothwendige Loxodromische Linie (λοξος schief und δρομος der Lauf). Diese Curve ist von der Beschaffenheit, dass sie alle Meridiane unter einem und demselben Winkel durchschneidet; sie gehört also zu den in der höhern Geometrie bekannten Trajectorien. Geht der Durchschnitt des Laufs des Schiffs mit jedem Meridian unter einem rechten Winkel, so ist die Loxodromische Linie ein Parallelkreis oder der Aequator selbst, in jedem andern Falle aber wird die Linie kein Kreis seyn können. Wir wollen die Beschaffenheit dieser Linie genauer unter-

und bezeichnet den Winkel welchen beide Linien mit einander bilden durch ε, so ist

$$\cos\varepsilon = \frac{1 + Aa + A'a'}{P.\,Q.}$$

wo der Kürze wegen

$$1 + aa + a'a' = PP$$
$$1 + AA + A'A' = QQ$$

gesetzt worden ist.

Sind nun die erwähnten zwei Linien berührende an zwei krummen Linien im Raume, so wird, wenn die Coordinaten der ersten durch x', y', z', die der zweiten durch x'', y'', z'' bezeichnet werden,

$$a = \frac{dy'}{dx'}, \quad a' = \frac{dz'}{dx'}$$

$$A = \frac{dy''}{dx''}, \quad A' = \frac{dx''}{dx''}$$

folglich wenn man das Element der ersten durch ds', das der zweiten durch ds'' andeutet

$$\cos\varepsilon.\, ds'.\, ds'' = dx'\, dx'' + dy'\, dy'' + dz'\, dz''.$$

Nun sey die erste Curve der Meridian, die zweite die loxodromische Linie, und man beziehe die Coordinaten derselben auf drei rechtwinklichte Axen, die sich im Mittelpunkte der Erde schneiden, so dass die Axe der z die Erdaxe, die Axe der x in der Ebene des Aequators nach den Punkt, dessen Länge Null, gezogen ist. Da der Meridian entsteht indem man die Kugel vermittelst einer Ebene schneidet, die durch die Erdaxe geht, so sind die beiden Gleichungen desselben

$$x'x' + y'y' + z'z' = rr, \quad y' = \alpha x'$$

wo r den Halbmesser der Erde, und α eine Constante bedeutet die durch die Lage des Meridians bestimmt wird. Man erhält hieraus

$$dy' = \alpha dx'$$

$$dz' = -dx'\left(\frac{\alpha y'}{z'} + \frac{x'}{z'}\right)$$

$$= -dx'\,(1 + \alpha a)\,\frac{x'}{z'}.$$

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

$$= dx' \sqrt{1 + aa} \cdot \frac{\sqrt{z'^2 + x'^2 (1 + aa)}}{z'}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung $\cos\varepsilon \, ds' \, ds'' = dx' \, dx'' + dy' \, dy'' + dz' \, dz''$, so kommt, indem die ganze Gleichung durch dz' dividirt und durch z' multiplicirt wird

$$\cos\varepsilon \, ds'' \sqrt{1 + aa} \cdot \sqrt{z'^2 + x'^2 (1 + aa)} = z' \, dx'' + ax' \, dy'' - (1 + aa) \, x' \, dz''.$$

Da nun aber die Bedingung des Durchschnitts unter gleichem Winkel, für alle Meridiane gelten soll, so muss man a vermittelst der Gleichung $y' = ax'$ eliminiren. Nach dieser Elimination darf man, weil in den Durchschnittspunkten die Coordinaten an beiden Curven dieselben sind, statt x', y', z', die andern x'', y'', z setzen, und um die Accente zu vermeiden, wollen wir die Coordinaten der loxodromischen Curve blos durch x, y, z bezeichnen. Man erhält dadurch ihre Differentialgleichung

$$\cos\varepsilon \, ds \sqrt{yy + xx} \cdot \sqrt{xx + yy + zz} = z(x\,dx + y\,dy) - (xy + yy)\, dz.$$

Die loxodromische Curve liegt auf der Kugel, also gilt für dieselbe auch die Gleichung

$$xx + yy + zz = rr.$$

Hierdurch verwandelt sich vorige Formel in

$$\cos\varepsilon \, ds \sqrt{rr - zz} = r\,dz.$$

Setzt man nun

$$x = r \cos p \cdot \cos l$$
$$y = r \cos p \cdot \sin l$$
$$z = r \sin p$$

wodurch der Gleichung der Kugel Genüge geleistet wird, und substituirt die daraus entspringenden Werthe in vorige Formel, so wird

$$\cos\varepsilon \sqrt{(dl^2 \cos p^2 + dp^2)} = dp$$

oder wenn man aus dieser dl sucht

$$dl = \operatorname{tang}\varepsilon \cdot \frac{dp}{\cos p}.$$

Hiervon ist das Integrat

$$l = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}\varepsilon \log \frac{1 + \sin p}{1 - \sin p} + \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, sey für den Ort der Abfarth des Schiffes

$$l = l', \; p = p', \text{ folglich auch}$$

$$l' = \tfrac{1}{2} \, tang \, \varepsilon . \, log \frac{1 + sin \, p'}{1 - sin \, p'} + \text{Const.}$$

und wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht

$$l - l' = \tfrac{1}{2} \, tang \, \varepsilon . \, log \frac{(1 + sin \, p)\,(1 - sin \, p')}{(1 - sin \, p)\,(1 + sin \, p')}$$

$$= tang \, \varepsilon . \, log \frac{tang\,(45 + \tfrac{1}{2} p)}{tang\,(45 + \tfrac{1}{2} p')} .$$

Für den Ort der Ankunft des Schiffes sey $p = p'$, $l = l''$, so hat man

$$l'' - l' = tang \, \varepsilon . \, log \frac{tang\,(45 + \tfrac{1}{2} p'')}{tang\,(45 + \tfrac{1}{2} p')}$$

aus welcher Gleichung der Winkel ε bestimmt wird.

§. 118.

Man sieht übrigens aus der Gleichung

$$cos \, \varepsilon . \, ds \sqrt{rr - zz} = rdz$$

dass die loxodromische Linie rectificabel ist. Setzt man statt z seinen Werth $r . \, sin \, p$, so erhält man

$$ds = \frac{rdp}{cos \, \varepsilon}$$

und wenn man zwischen den Gränzen $p = p'$ bis $p = p''$ integrirt, so erhält man die ganze Länge des zurückgelegten Weges

$$s = r . \, (p'' - p') . \, sec \, \varepsilon .$$

§. 119.

Wenn der Unterschied der Polhöhen der Oerter sehr klein oder wohl gar Null ist, so lässt sich die Formel für den zurückgelegten Weg nicht in der Gestalt

$$s = r . \, sec \, \varepsilon \, (p'' - p')$$

anwenden, weil dann $p'' - p'$ nahe Null und $sec \, \varepsilon$ beinahe unendlich ist. Man hat aber in diesem Fall

$$\frac{tang(45 + \frac{1}{2}p'')}{tang(45 + \frac{1}{2}p')} = \frac{tang(45 + \frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}(p'' - p'))}{tang(45 + \frac{1}{2}p')}$$

$$= 1 + \frac{p'' - p'}{\cos p'} \text{ also}$$

$$\log \frac{tang(45 + \frac{1}{2}p'')}{tang(45 + \frac{1}{2}p')} = \frac{p'' - p'}{\cos p'}$$

da man wegen der vorausgesetzten Kleinheit von $p'' - p'$, alle höhern Potenzen vernachlässigen kann; es ergiebt sich daher

$$l'' - l' = tang\, s \frac{p'' - p'}{\cos p'},$$

$$\sec s = \frac{\sqrt{\cos p'^2 (l'' - l)^2 + (p'' - p)}}{p'' - p'}$$

$$= \frac{\cos p' (l'' - l')}{p'' - p'}; \text{ folglich}$$

$$s = r \cos p' (l'' - l').$$

§. 120.

Dass in dem Falle, wenn die beiden Endpunkte der loxodromischen Linie unter gleicher Polhöhe liegen, alle Punkte derselben in einem Parallelkreise sich befinden, lässt sich leicht folgendermassen darthun. Aus der Gleichung

$$l'' - l' = tang\, s \log \frac{tang(45 + \frac{1}{2}p'')}{tang(45 + \frac{1}{2}p')}$$

folgt für $p'' = p'$, $tang\, s = \infty$.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung

$$l - l' = tang\, s \log \frac{tang(45 + \frac{1}{2}p)}{tang(45 + \frac{1}{2}p')}$$

so ergiebt sich

$$\log \frac{tang(45 + \frac{1}{2}p)}{tang(45 + \frac{1}{2}p')} = 0 \text{ und hieraus}$$

$$tang(45 + \frac{1}{2}p) = tang(45 + \frac{1}{2}p'); \quad p = p'.$$

§. 121.

Es segelt ein Schiff von Lissabon nach Rio Janeiro, man fragt unter welchem Winkel sein Lauf

die Meridiane durchschneidet, und wie gross die Länge des Weges sey. Man hat hier

$$l' = 11^\circ\ 28'\ 45''\ \text{östl. von Paris}$$
$$l'' = 45^\circ\ 5'\ 0''$$
$$p' = +38^\circ\ 42'\ 24''$$
$$p'' = -22^\circ\ 45'\ 10''.$$

Zuerst nehme man die Formel

$$\tang \varepsilon = \frac{l'' - l'}{\log \tang(45 + \tfrac{1}{2} p'') - \log \tang(45 + \tfrac{1}{2} p')}$$

wobei man bemerken muss, dass die im Nenner stehenden Logarithmen natürliche sind. Man kann sich aber der briggschen bedienen, wenn man den Zähler $l'' - l'$ mit dem Modulus $m = 0{,}43429\ldots$ multiplicirt; ferner muss $l'' - l'$ in Theilen des Halbmessers angegeben werden; daher verwandle man diese Grösse in Secunden, und dividire sie durch 206265. Man hat also

$$\log \tang \varepsilon = \log(l'' - l') + \log m - \log 206265 - \log \Delta.$$

wo Δ den Nenner des Bruches andeutet, und die daselbst zu nehmenden Logarithmen als briggsche behandelt werden. Nimmt man die beiden vorkommenden constanten Logarithmen zusammen, so ergiebt sich die Formel

$$\log \tang \varepsilon = \log(l'' - l') + 4.32336 - (10 + \log \Delta)$$

Im vorliegenden Falle hat man

$$l'' - l' = 33^\circ\ 36'\ 15'' = 120975''$$

§. 122.

Bei allen in den frühern Paragraphen angegebenen Projectionsarten der Erdoberfläche wird die loxodromische Linie eine Projection haben, deren Natur nur durch eine transscendente Gleichung ausgedrückt werden kann. Da es aber für die Schifffarth nothwendig ist, dass der Lauf des Schiffes schnell bestimmt und durch Zeichnung auf eine leichte Art in die Charten eingetragen werden könne, so musste man auf ein Mittel denken solche Charten zu verfertigen, bei denen die loxodromische Linie durch die einfachste Zeichnung nämlich durch eine gerade Linie dargestellt werden konnte. Man nennt diese Art von Darstellung Mercator's Projectionsmethode, und die Charten selbst, Seecharten oder reducirte Charten. Man sieht leicht, dass bei dieser Art von Darstellung der Erde zugleich alle Meridiane und Parallelkreise gerade Linien seyn werden, indem sie selbst zu den loxodromischen Curven gehören.

§. 123.

Die Differentialgleichung einer geraden Linie, die die Axe der y unter einem Winkel ε schneidet, ist bekanntlich $dy = \cot \varepsilon . dx$.

Nun war die Differentialgleichung der loxodromischen Linie auf der Kugel

$$dl = tang\, \varepsilon . \frac{dp}{\cos p}.$$

Da man wird im Allgemeinen die Grössen l und p Functionen der Coordinaten x und y in der Ebene darstellen können. Wir wollen die Abscissenlinie als Darstellung des Aequators annehmen, und den Coordinaten in dem Punkte festlegen, in Darstellung des ersten Meridians die schneidet. Wir setzen ferner

$$dl = \alpha dx + \beta dy$$

$$= \alpha' dx + \beta' dy.$$

Im Allgemeinen Functionen von x und

y seyn können, die nur so beschaffen seyn müssen, dass die Grössen $\alpha dx + 6dy$, $\alpha' dx + 6' dy$ vollkommene Differentiale sind. Setzt man diese angenommenen Werthe in die Differentialgleichung der loxodromischen Curve, so erhält man

$$\alpha dx + 6dy = tang\, \varepsilon\, (\alpha' dx + 6' dy). \text{ oder}$$

$$dy = \frac{\alpha' \, tang\, \varepsilon - \alpha}{6 - 6' \, tang\, \varepsilon} dx,$$

welches die Differentialgleichung der Darstellung der loxodromischen Linie in einer Ebene ist.

Soll diese Gleichung für eine gerade Linie gelten, die durch $dy = dx.\ cot\, \varepsilon$ ausgedrückt wird, so muss

$$\frac{6 - 6' \, tang\, \varepsilon}{\alpha' \, tang\, \varepsilon - \alpha} = tang\, \varepsilon$$

seyn, oder wenn man den Bruch auflösst

$$6 - 6' \, tang\, \varepsilon = \alpha' \, tang\, \varepsilon^2 - \alpha \, tang\, \varepsilon.$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von $tang\, \varepsilon$ richtig seyn soll, so muss

$$6 = 0,\ \alpha' = 0,\ \alpha = 6'$$

seyn. Hierdurch gehen die beiden Formeln

$$dl = \alpha dx + 6dy, \quad \frac{dp}{cos\, p} = \alpha' dx + 6' dy,$$

in diese über

$$dl = \alpha dx, \quad \frac{dp}{cos\, p} = \alpha dy.$$

Aus der Bedingung der Integrabilität dieser beiden Gleichungen ergiebt sich sogleich, dass α eine constante Grösse seyn muss; man hat also

$$l = \alpha x, \quad log\, tang(45 + \tfrac{1}{2} p) = \alpha y.$$

Die hinzuzufügenden Constanten kann man weglassen, da wir voraussetzten, dass für $l = 0$, $x = 0$, und für $p = 0$, $y = 0$ seyn sollte. Man sieht, dass die Längengrade alle einander gleich werden, die Breitengrade aber ungleich, und die Darstellung selbst kann sich nie bis zum Pol erstrecken, da für $p = 90°$, $log\, \infty = \infty$, also auch y unendlich wird.

§. 124.

Die Darstellung der Oberfläche der Erde in einer Ebene, lässt sich aber unter einer allgemeinern Ansicht

e ersten allgemeinern Untersuchungen haben
lt, Lambert in seinen Beiträgen zum
uch der Mathematik, Euler in den
sburger Commentarien für das Jahr 1777,
nge in den Berliner Memoiren für das
79, und aus dem allgemeinsten Gesichtspunkte
in einer von der königlichen Gesellschaft der
schaften zu Copenhagen gekrönten Preisschrift,
den von Schumacher herausgegebenen
nomischen Abhandlungen sich befindet.

§. 125.

eine geographische Charte nichts anders ist,
e regelmässige Darstellung der Erdoberfläche,
nte man die Verzeichnung der Meridiane und
lkreise in der Ebene nach irgend einem durch
alytische Formel ausdrückbaren Gesetz bestim-
und hierdurch die Lagen der verschiedenen
in der Charte eintragen, so dass, wenn x und
Coordinaten eines Punktes in der Ebene sind,
nem Punkte auf der Erdoberfläche entspricht,
Länge $= l$, und Breite $= p$ ist, im Allgemeinen

$$x = \varphi(p, l), \qquad y = \psi(p, l)$$

und ψ zwei ganz willkührliche Functionen an-
gesetzt werden kann. Wollte man aber in
swahl der Formen dieser Functionen ganz will-
h verfahren, so könnte die grösste Deformität
en, so dass die gegenseitige Lage der Oerter
Darstellung von der wahren auf der Ober-

Grunde legen, welches dahin abzweckt, die Gestalt der Länder auf der Charte der auf der Erde so ähnlich zu machen als möglich. Eine vollständige Aehnlichkeit würde wie schon §. 108. erwähnt ist in dem Falle statt finden, wenn die Erde eine abwickelungsfähige Fläche wäre; da sie aber eine solche nicht ist, so muss man wenigstens so viel zu bezwecken suchen, dass unendlich kleine Stücke der Erdoberfläche, denen auf der Charte ähnlich werden, so dass der Grundsatz einer Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen als Leitfaden bei der Verfertigung von Darstellungen der Erdoberfläche angenommen werden kann. Auch nach dieser Einschränkung wird die Aufgabe noch unbestimmt bleiben, da man nur die Form der Function bestimmt erhält, aber nicht ihre Beschaffenheit selbst; allein wie man dieselbe dann auch annehmen mag, so wird man doch nie eine missgestaltete Abbildung der Erdoberfläche erhalten.

§. 127.

Wir wollen uns nun mit der Untersuchung über die aus diesem Grundsatze abzuleitende Form der Functionen beschäftigen. Zu diesem Endzweck denken wir uns auf der Erdoberfläche drei einander unendlich nahe liegende Punkte, so bilden diese auf der Oberfläche der Erde ein unendlich kleines geradliniges Dreieck; diesen Punkten werden drei andere in der Darstellung in der Ebene entsprechen, die ebenfalls einander unendlich nahe liegen und ein geradliniges Dreieck ausmachen; beide Dreiecke können als die Flächenelemente der respectiven Oberfläche angesehen werden. Sollen nun diese Dreiecke einander ähnlich seyn, so müssen die Winkel in demselben einander gleich, folglich die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten einander proportional werden. Bezeichnet man also ein Linearelement der Oberfläche der Erde durch ds, und auf der Charte durch $d\sigma$, so wird

$$ds : d\sigma = 1 : m,$$

seyn müssen, folglich

$$d\sigma = mds.$$

und wenn m eine constante Grösse seyn könnte, so

ch Umdrehung einer ebenen Figur um eine
standen ist, wird der Meridian durch die er-
e Curve dargestellt werden, und die Parallel-
nter rechten Winkeln durchschneiden. Dies
h leicht auf folgende Art beweisen. Wir be-
lie Oberfläche des Revolutionskörpers auf drei
nklichte Axen, wovon wir die Axe der z mit
hungsaxe zusammenfallen lassen, und die Axen
nd y durch irgend einen ihrer Punkte senk-
uf dieselbe ziehen. Sind nun die Coordinaten
nktes x, y, z, so wird der Abstand desselben
Axe durch

$$\sqrt{xx + yy}$$

ickt, und dieser Abstand bleibt für alle Punk-
che gleichen Abstand von der Ebene der x, y
derselbe. Der letztere Abstand ist aber nichts
als die Ordinate z, folglich hängen die Aus-
z und $xx + yy$ so mit einander zusammen,
an der eine constant ist, auch der andere con-
eibt, und nothwendig mit der Aenderung des
ich eine Aenderung des andern verknüpft ist.
also

$$xx + yy = Fz.$$

emeine Gleichung aller durch Umdrehung ei-
ve entstandener Oberflächen seyn, wo F eine
liche Function bedeutet. Nun seyen die Co-
n derjenigen Punkte, welche auf einem Me-
iegen x', y', z', so sind die beiden Gleichun-

Den Winkel ε den zwei Berührungslinien mit einander machen wird nach §. 117. durch

$$\cos\varepsilon = \frac{dx'\,dx'' + dy'\,dy'' + dz'\,dz''}{ds'.\,ds''}.$$

Nun findet sich aber aus den vorigen Gleichungen $dz'' = 0$, $x''\,dx'' = -y''\,dy''$, $\alpha dx' = dy'$. und wenn man die beiden letzten Differentiale mit einander multiplicirt

$$\alpha x''\,dx'\,dx'' = -y''\,dy'\,dy'' \text{ folglich}$$

$$dx'\,dx'' + dy'\,dy'' + dz'\,dz'' = dy'\,dy''\left(1 - \frac{y''}{\alpha x''}\right).$$

Im Durchschnittspunkte des Meridians und Parallelkreises wird aber auch $y'' = \alpha x''$, und daher hat man $dx'\,dx'' + dy'\,dy'' + dz'\,dz'' = 0$

$$\cos\varepsilon = 0, \quad \varepsilon = 90.$$

also durchschneiden sich beide krumme Linien unter rechten Winkeln.

§. 129.

Bezeichnet man die geographische Breite im allgemeinen Sinne des §. 59. genommen, durch p, den Krümmungshalbmesser durch ϱ, so wird das Element des Meridians $= \rho dp$ seyn. Nennt man ferner die Länge des Ortes l, seine Entfernung von der Drehungsaxe R, so ist das Element des Parallelkreises $= R dl$.

Da beide Elemente am Orte einen rechten Winkel bilden, so wird die Entfernung zweier Orte von einander, deren der erste die Breite p, die Länge l, der zweite aber die Breite $p + dp$, die Länge $l + dl$ hat durch

$$ds = \sqrt{\varrho\varrho\,dp^2 + RR\,dl^2}$$

ausgedrückt werden.

Nun seyen die Coordinaten der Punkte der Darstellung in einer Ebene, x und y, so dass dem ersten Punkte auf der krummen Oberfläche, dessen Länge durch l und Breite durch p bestimmt wird, die Coordinaten x und y, dem zweiten, dessen Lage durch $p + dp$ und $l + dl$ angegeben wird, die Coordinaten

dx und $y + dy$ entsprechen, so wird die Entung der dargestellten Punkte

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Substituirt man diese Werthe von ds und $d\sigma$, in Gleichung $d\sigma = mds$ (§. 127.) so kommt

$$dx^2 + dy^2 = mm\,(\rho\rho dp^2 + RRdl^2).$$

Die Grössen ρ und R bestimmen sich aus der r der erzeugenden Curve, hängen daher blos p ab, und der Differentialcoefficient $\frac{\rho}{R}$ mit dp iplicirt, wird daher ein vollkommenes Differal einer bestimmten Function von p seyn, die in jedem besonderen Falle aus der Gleichung der drehenden krummen Linie angeben lässt. Man ıe der Kürze wegen

$\rho dp = Rd\theta$, $\quad mR = u$, so wird

$$dx^2 + dy^2 = uu\,(d\theta^2 + dl^2),$$

man muss nun x und y als Functionen von θ l so zu bestimmen suchen, dass dieser Gleichung ige geleistet wird.

§. 130.

Um diese Functionen zu finden, nehmen wir folıe zwei Differentialgleichungen an:

$dx = uqd\theta + utdl$, $\quad dy = uq'd\theta + ut'dl$,

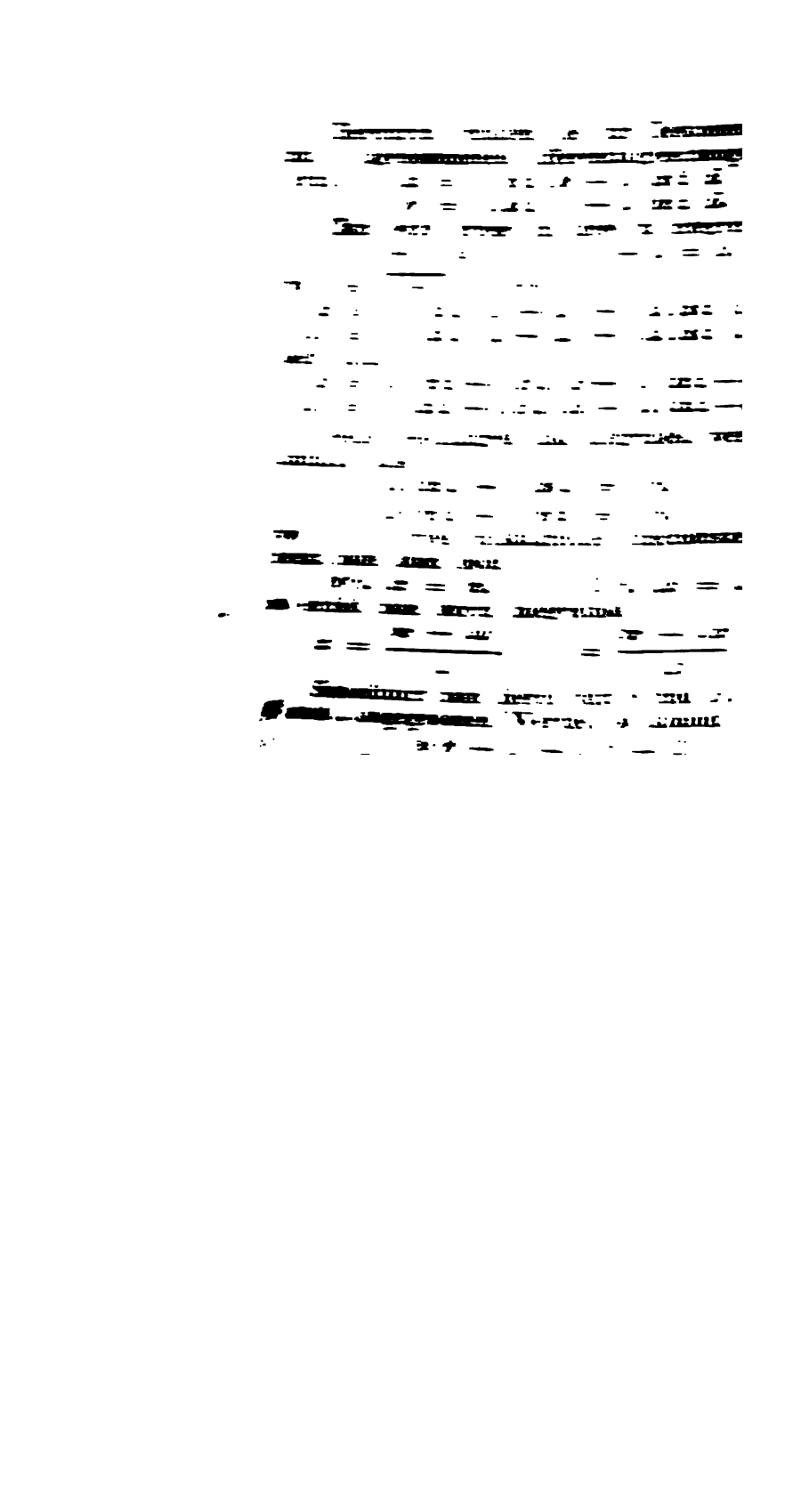
rhält man durch Substitution dieser Werthe in Gleichung des vorigen Paragraphs

$$\begin{aligned} d\theta^2 + dl^2 = {} & (qq + q'q')\,d\theta^2 \\ & + (tt + t't')\,dl^2 \\ & + 2(qt + q't')\,d\theta\,dl. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von $d\theta$ und hne eine gewisse Relation dieser Differentiale anhmen, statt haben soll, so muss sie identisch , folglich muss man folgende Relationen annehn

$$\begin{aligned} qq + q'q' &= 1 \\ tt + t't' &= 1 \\ qt + q't' &= 0. \end{aligned}$$

Eine der vier Grössen q, t, q', t' ist also willlich, da wir nur drei Gleichungen für dieselben ı, und wir können also alle vier durch eine veränderliche Grösse so ausdrücken, dass die



§. 132.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen

$$u(\sin\xi + i\cos\xi) = \varphi' v,$$
$$u(\sin\xi - i\cos\xi) = \psi' w,$$

einander und bemerkt, dass

$$(\sin\xi + i\cos\xi)(\sin\xi - i\cos\xi) = \sin\xi^2 + \cos\xi^2 = 1.$$

hält man

$$v = \varphi' v.\ \psi' w = \varphi'(\theta + il).\ \psi'(\theta - il).$$

Ist $u = mR$, so ergiebt sich

$$m = \frac{\sqrt{\varphi'(\theta + il).\ \psi'(\theta - il)}}{R},$$

rch das Vergrösserungsverhältniss gefunden wird.

§. 133.

ollen die beiden Gleichungen (§. 131.)

$$dx = u\sin\xi\, d\theta - u\cos\xi\, dl.$$
$$dy = u\cos\xi\, d\theta + u\sin\xi\, dl$$

lich integrabel seyn, so ist bekannt, dass man die Coefficienten von $d\theta$ und dl folgende Gleichungen haben muss:

$$\left(\frac{d.\ u\sin\xi}{dl}\right) = -\left(\frac{d.\ u\cos\xi}{d\theta}\right)$$
$$\left(\frac{d.\ u\cos\xi}{dl}\right) = +\left(\frac{d.\ u\cos\xi}{d\theta}\right)$$

r wenn man die angezeigten Differentiationen klich ausführt

$$\left(\frac{du}{dl}\right)\sin\xi + u\cos\xi\left(\frac{d\xi}{dl}\right) = -\left(\frac{du}{d\theta}\right)\cos\xi + u\sin\xi\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dl}\right)\cos\xi - u\sin\xi\left(\frac{d\xi}{dl}\right) = +\left(\frac{du}{d\theta}\right)\sin\xi + u\cos\xi\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right).$$

Multiplicirt man die erste durch $\cos\xi$, die zw[illegible] durch $\cos\theta$, und addirt die Producte, so kommt

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d\xi}{d\theta}.$$

Multiplicirt man die erste durch $\cos\xi$, die z[illegible] durch $\sin\xi$, und giebt die Producte von einm[illegible], so erhält man

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{d\xi}{d\theta}.$$

Nun war aber $u = mR$, wo m das Vergr[illegible]ungsverhältniss, und R eine Function von θ ist; [illegible] das Vergrösserungsverhältniss ein consta[illegible] [illegible] so wird

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right) = m\frac{dR}{d\theta}, \qquad \left(\frac{du}{dl}\right) = 0$$

[illegible] die beiden vorigen Gleichungen in [illegible]

$$\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) = 0, \qquad mR\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) = -m\frac{dR}{d\theta}$$

[illegible] man die erste nach l, die zw[illegible] [illegible] auf diese Art ξ, so wird

$$\frac{d\xi}{d\theta} = 0, \quad \text{oder wenn man integrirt,}$$

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \text{Const.}$$

. Man hat aus den beiden Gleichungen §. 131.
nan die untere mit i multiplicirt und dann
usammenaddirt

$$x + iy = \varphi(\theta + il)$$

ss x dem reellen und y den in i multiplicir-
ile der Function gleich gesetzt werden.

nmt man z. B.

$$\varphi(\theta + il) = ae^{-(\theta + il)}$$

e Basis der natürlichen Logarithmen ist, und
Constante bedeutet, so hat man

$$x + iy = ae^{-(\theta + il)};$$

aber bekanntlich $e^{-il} = \cos l - i \sin l$,

auch $x + iy = ae^{-\theta} (\cos l - i \sin l$,

raus $x = + a. e^{-\theta}. \cos l.$

$$y = - a. e^{-\theta} \sin l.$$

nmt man an, die darzustellende Oberfläche
e Kugel, so hat man um die Grösse θ zu be-
n die Gleichung (§. 129.)

$$\rho dp = R d\theta$$

für diese Oberfläche ρ constant ist, und der
l jedes Punktes von der Axe, dessen Breite p
eich $\rho \cos p$ wird, so hat man indem dieser
statt R gesetzt wird

$$dp = d\theta. \cos p.$$

wenn man auf beiden Seiten durch $\cos p$ di-
und dann integrirt

Um nun aber eine Gleichung für den Kreis halten, in welcher die Coordinaten a und b mehr vorkommen, differentiire man die vorige ung zweimal, indem man sowohl dy als dx als derlich ansieht, indem beide einzeln als Func- der Grössen θ, l betrachtet werden müssen; urch ergiebt sich

$$dy(y-b) + dx(x-a) = 0$$
$$y^2 + dx^2 + ddy(y-b) + ddx(x-a) = 0$$

wenn man diese beiden mit der ersten verbin- und $x - a$, $y - b$ eliminirt,

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\ ddx - dx\ ddy} = r,$$

ie die verlangte Gleichung ist, und bekanntlich Ausdruck des Krümmungshalbmessers enthält.

§. 138.

Nun war allgemein

$$dx = u \sin\xi\ d\theta - u \cos\xi\ dl,$$
$$dy = u \cos\xi\ d\theta + u \sin\xi\ dl.$$

so lange man auf einerlei Meridian bleibt ist l ant, also

$$dx = u \sin\xi\ d\theta, \qquad dy = u \cos\xi\ d\theta,$$

hieraus durch Differentiation

$$ddx = d\theta^2 \left[\sin\xi \left(\frac{du}{d\theta}\right) + u \cos\xi \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)\right].$$

$$ddy = d\theta^2 \left[\cos\xi \left(\frac{du}{d\theta}\right) - u \sin\xi \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)\right].$$

Man erhält daher

$$dy.\ ddx - dx.\ ddy = u^2\ d\theta^3 \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)$$

$$(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}} = u^3\ d\theta^3$$

ich wenn man den Halbmesser des Meridians h M bezeichnet

$$M = u. \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)}, \text{ oder da nach §. 133.}$$

$$\ldots \frac{du}{dl} = \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right),$$ so wird auch

$$\ldots = \frac{1}{\ldots}\left(\frac{du}{dl}\right).$$

§. 139.

[illegible] ist θ constant, da [illegible] folglich

$$\ldots \cos\xi\, dl$$

$$\ldots \sin\xi\, dl.$$

$$\ldots \left(\frac{d\xi}{dl}\right) - \cos\xi\left(\frac{du}{dl}\right)\Big].$$

$$\ldots \left(\frac{d\xi}{dl}\right) + \sin\xi\left(\frac{du}{dl}\right)\Big].$$

$$\ldots = u^2\, dl^2\left(\frac{d\xi}{dl}\right)$$

$$\ldots = u^2\, dl^2.$$

[illegible] Halbmesser des [illegible]

$$\ldots = \frac{\ldots}{\ldots}$$

action von θ allein seyn muss, weil der Halbmes-
des Parallelkreises blos von seiner Entfernung
m Aequator abhängt, so folgt, dass

$$\left(\frac{dM}{d\theta}\right) = 0, \quad \left(\frac{dP}{dl}\right) = 0,$$

yn wird. Beiden Bedingungen leistet die Gleichung
$\left(\frac{dd\omega}{d\theta dl}\right) = 0$, vollkommen Genüge, und die beiden
nctionen φ, ψ müssen dieser Form gemäss be-
mmt werden.

§. 141.

Man hat aus §. 132.

$$uu = \varphi'(\theta + il).\ \psi'(\theta + il)$$

so wenn man

$$\frac{1}{\varphi'(\theta + il)} = [f(\theta + il)]^2$$

$$\frac{1}{\psi'(\theta - il)} = [F(\theta - il)]^2$$

tzt, so kommt

$$\omega = f(\theta + il).\ F(\theta - il).$$

Differentiirt man diese Gleichung noch θ, so wird

$$\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right) = f'(\theta + il).\ F(\theta - il) + f(\theta + il).\ F'(\theta - il)$$

nd diese Gleichung nochmals nach l differentiirt

$$\left(\frac{dd\omega}{d\theta dl}\right) = if''(\theta + il).\ F(\theta - il). - if(\theta + il).\ F''(\theta - il).$$

Da wir ferner die Bedingung

$$\left(\frac{dd\omega}{d\theta dl}\right) = 0$$

funden haben, so muss

$$\frac{f''(\theta + il)}{f(\theta + il)} = \frac{F'(\theta - il)}{F(\theta - il)}$$ werden.

§. 142.

Im Allgemeinen ist der vor dem Gleichheitszeichen stehende Theil eine Function von $\theta + il$, der hinter demselben befindliche eine Function von $\theta - il$; sollen nun beide Ausdrücke gleich seyn, so dürfen in jedem der beiden Ausdrücke die veränderlichen Grössen θ, l gar nicht mehr vorkommen, sondern dieselben constant seyn.

Bezeichnet man daher durch n eine constante Grösse, so wird

$$\frac{f'(\theta + il)}{f(\theta + il)} = n, \quad \frac{F'(\theta - il)}{F(\theta - il)} = n,$$

und diese beiden Gleichungen bestimmen die Formen der Functionen f, F, und dadurch werden auch die der Functionen φ, ψ bekannt.

§. 143.

Nimmt man der Kürze wegen

$$f(\theta + il) = z, \quad \theta + il = v,$$

so wird aus der Gleichung

$$\frac{f''(\theta + il)}{f(\theta + il)} = n, \quad \text{diese andere:} \quad \frac{ddz}{z\,dv^2} = n.$$

Man multiplicire auf beiden Seiten mit $2zdz$, so wird $2\frac{dz.\,ddz}{dv^2} = 2nzdz$, also integrirt,

$$\frac{dz^2}{dv^2} = a + nz^2.$$

Hieraus ergiebt sich von Neuem

$$dv = \frac{dz}{\sqrt{a + nzz}}.$$

wovon bekanntlich das Integral

$$v = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot log\left[\frac{z\sqrt{n} + \sqrt{a + nzz}}{\sqrt{a}}\right] + \frac{log\,b}{\sqrt{n}}$$

ist. Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$e^v\sqrt{n} = \frac{b}{\sqrt{a}}\,[z\sqrt{n} + \sqrt{a + nzz}].$$

Man findet aus dieser Gleichung indem man z sucht

$$z = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{n}} \cdot [e^{v\sqrt{n}} - bb\, e^{-v\sqrt{n}}].$$

§. 144.

Quadrirt man diesen Ausdruck, und bemerkt, dass nach §. 141 und 143.,

$\frac{1}{zz} = \varphi' v$, so hat man

$$\varphi' v = \frac{4bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{1}{[e^{v\sqrt{n}} - bb.e^{-v\sqrt{n}}]^2}$$

$$= \frac{4bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{e^{2v\sqrt{n}}}{[e^{2v\sqrt{n}} - bb]^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dv und integrirt, so kommt, da

$$\int \varphi' v.\, dv = \varphi v,$$

$$\varphi v = -\frac{2bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{1}{e^{2v\sqrt{n}} - bb} + c.$$

folglich, wenn statt v sein Werth $\theta + il$ restituirt wird

$$\varphi(\theta + il) = -\frac{2bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{1}{e^{2\theta\sqrt{n} + 2il\sqrt{n}} - bb} + c.$$

§. 145.

Der leichtern Behandlung dieses Ausdrucks wegen, müssen wir denselben auf die Form $P + iQ$ reduciren. Man hat bekanntlich

$$e^{2il\sqrt{n}} = \cos 2l\sqrt{n} - i \sin 2l\sqrt{n}.$$

folglich

$$\frac{1}{e^{2\theta\sqrt{n} + 2il\sqrt{n}} - bb}$$

nstanten a', b', c' den Constanten a, b, c
müssen.
rhält dann

$$\frac{2bb\sqrt{n}}{a}\cdot\frac{e^{\eta}\cos\lambda - bb}{e^{2\eta} - 2bb\,e^{\eta}\cos\lambda + b^4} + c.$$

$$\frac{2bb\sqrt{n}}{a}\cdot\frac{e^{\eta}\sin\lambda}{e^{2\eta} - 2bb\,e^{\eta}\cos\lambda + b^4}.$$

§. 147.

Werthe von x und y sind noch nicht die sten, welche man aus voriger Auflösung abn, indem nur drei Constanten in denselben n sind, da der Natur der Sache gemäss illkührliche Constanten in diesen Werthen seyn müssen. Dies kam aber daher, weil Grössen a, b, c als reelle betrachteten; allein indert nichts, dass wir dieselben nicht als r ansehen können. Wir setzen zu diesem

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$bb = B(\cos 6 + i\sin 6)$$
$$c = C(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

stituiren diese Werthe in dem Ausdruck von il) §. 144. so kommt, wenn wie §. 145.

$$2\theta\sqrt{n} = \eta, \qquad 2l\sqrt{n} = \lambda,$$

ze wegen gesetzt wird,

$$p(\theta + il) = C(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

$$\frac{(\cos 6 + i\sin 6)}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)}\sqrt{n}\cdot\frac{1.}{e^{\eta+i\lambda} - B(\cos 6 + i\sin 6)}$$

ist aber, wenn man die imaginären Ausehörig reducirt

$$\frac{\cos 6 + i\sin 6}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos(6-\alpha) + i\sin(6-\alpha)$$

$$\frac{1}{e^{\eta+i\lambda} - B(\cos 6 + i\sin 6)}$$

$$\frac{\cos\lambda - B\cos 6 - i(e^{\eta}\sin\lambda - B\sin 6)}{e^{2\eta} + BB - 2e^{\eta}B\cos(\lambda - 6)}.$$

§. 149.

ı aus §. 131.

$$= \frac{\varphi(\theta + il) + \psi(\theta - il)}{2}$$

$$= \frac{\varphi(\theta + il) - \psi(\theta - il)}{2i}$$

man durch Einführung der gefundenen

$$= C \cos\gamma - P \frac{2B}{A} \sqrt{n}.$$

$$= C \sin\gamma + Q \frac{2B}{A} \sqrt{n}.$$

eiden Gleichungen geben alle Darstellun-
urch Umdrehung entstandenen Oberfläche,
arstellung in den unendlich kleinen Thei-
seyn, und zugleich die Parallelkreise und
lurch Kreise dargestellt werden sollen.

§. 150.

ıben aus §. 143. die Gleichungen

$$f(\theta + il) = z$$
$$\theta + il = v.$$

$$\frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{n}} [e^{v\sqrt{n}} - bb\, e^{-v\sqrt{n}}]$$

wir bedenken, dass

$$n = \tfrac{1}{4}\eta, \qquad l\sqrt{n} = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

wir

$$= \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{n}} [e^{\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}il} - bb\, e^{-\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}il}],$$

an hierin statt $+ i$, $- i$, und statt a, b, so kommt

$$= \frac{\sqrt{a'}}{2b'\sqrt{a}} [e^{\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}il} - b'b'\, e^{-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}il}].$$

icirt man diese beiden Functionen $f(\theta + il)$
$il)$ mit einander, so ergiebt sich
$+ il)$. $F(\theta - il) =$

$$\frac{aa'}{b'n} [e^{\eta} - bb\, e^{-il} - b'b'\, e^{+il} + bb\, b'b'\, e^{-\eta}].$$

$$M = \pm \frac{\sqrt{n}}{A \sin(\lambda - 6)}.$$

§. 154.

Um die Parallelkreise zu bestimmen, muss man aus den beiden letzten Gleichungen des §. 152. die Grösse λ eliminiren; man schreibe die beiden Gleichungen so

$$\frac{(x - C\cos\gamma)}{(x - C\cos\gamma)^2 + (y - C\sin\gamma)^2} - \frac{A\cos\alpha}{2\sqrt{n}} = -\frac{A}{2B\sqrt{n}} e^{\eta} \cos(\lambda - 6 + \alpha)$$

$$\frac{(y - C\sin\gamma)}{(x - C\cos\gamma)^2 + (y - C\sin\gamma)^2} + \frac{A\sin\alpha}{2\sqrt{n}} = \frac{A}{2B\sqrt{n}} e^{\eta} \sin(\lambda - 6 + \alpha)$$

und addire ihre Quadrate zusammen; man erhält dann

$$\frac{1 + \frac{A}{\sqrt{n}}(y - C\sin\gamma)\sin\alpha - (x - C\cos\gamma)\cos\alpha \cdot \frac{A}{\sqrt{n}}}{(y - C\sin\gamma)^2 + (x - C\cos\gamma)^2} + \frac{AA}{4n} = \frac{AA}{4BBn} e^{2\eta}$$

oder auch

$$1 + \frac{A}{\sqrt{n}}(y - C\sin\gamma)\sin\alpha - (x - C\cos\gamma)\cos\alpha \cdot \frac{A}{\sqrt{n}} + 4n \cdot \frac{(y - C\sin\gamma)^2 + (x - C\cos\gamma)^2}{AA\,BB - AA\,e^{2\eta}} BB = 0.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes des Parallelkreises durch x'', y'' und den Halbmesser durch P, so ist

$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 = PP.$$

und man findet dann

$$x'' = C\cos\gamma + \frac{2BB\sqrt{n}\cdot\cos\alpha}{ABB - Ae^{2\eta}}$$

$$\gamma'' = C \sin\gamma - \frac{2BB\sqrt{n}.\sin\alpha}{A\,BB - A\,e^{2\eta}}$$

$$P = \pm\frac{2B\sqrt{n}}{A}.\frac{e^{\eta}}{BB - e^{2\eta}}.$$

§. 155.

Die beiden Halbmesser M und P konnte man schon aus frühern Formeln finden; denn man hat (§. 140.)

$$\frac{1}{M} = -\left(\frac{d\omega}{dl}\right), \qquad \frac{1}{P} = +\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right).$$

und da (§. 141 und 150.)

$$\omega = f(\theta + il).\ F(\theta - il).$$

$$= \frac{A}{2Bn}\left[e^{\eta} - 2B\cos(6-\lambda) + BB\,e^{-\eta}\right].$$

so wird, wenn man differentiirt

$$d\omega = \frac{A}{4Bn}\left[e^{\eta}\,d\eta - 2B\sin(6-\lambda)\,d\lambda - BB\,e^{-\eta}\,d\eta\right].$$

oder da

$$d\eta = 2d\theta\sqrt{n}, \qquad d\lambda = 2dl\sqrt{n}$$

so kommt auch

$$d\omega = \frac{A}{2B\sqrt{n}}\left[e^{\eta}\,d\theta - 2B\sin(6-\lambda)\,dl - BB\,e^{-\eta}d\theta\right].$$

und hieraus

$$\left(\frac{d\omega}{dl}\right) = -\frac{A}{\sqrt{n}}\sin(6-\lambda)$$

$$\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right) = \frac{A}{2B\sqrt{n}}\left[e^{\eta} - BB\,e^{-\eta}\right].$$

Es ergiebt sich daher

$$M = \frac{\sqrt{n}}{A\sin(6-\lambda)},$$

$$P = \frac{2B\sqrt{n}}{A}.\frac{e^{\eta}}{e^{2\eta} - BB}.$$

$$A = \pm \frac{\sqrt{n}}{A \sin(\lambda - 6)}.$$

§. 154.

die Parallelkreise zu bestimmen, muss man beiden letzten Gleichungen des §. 152. die eliminiren; man schreibe die beiden Gleiso

$$\frac{(x - C\cos\gamma)}{C\cos\gamma)^2 + (y - C\sin\gamma)^2} - \frac{A\cos\alpha}{2\sqrt{n}} = -\frac{A}{2B\sqrt{n}}\, e^{\eta}\cos(\lambda - 6 + \alpha)$$

$$\frac{(y - C\sin\gamma)}{C\cos\gamma)^2 + (y - C\sin\gamma)^2} + \frac{A\sin\alpha}{2\sqrt{n}} = \frac{A}{2B\sqrt{n}}\, e^{\eta}\sin(\lambda - 6 + \alpha)$$

ddire ihre Quadrate zusammen; man erhält

$$\frac{\frac{A}{\sqrt{n}}(y - C\sin\gamma)\sin\alpha - (x - C\cos\gamma)\cos\alpha.\frac{A}{\sqrt{n}}}{(y - C\sin\gamma)^2 + (x - C\cos\gamma)^2} + \frac{AA}{4n} = \frac{AA}{4BBn}\, e^{2\eta}$$

auch

$$1 + \frac{\frac{A}{\sqrt{n}}(y - C\sin\gamma)\sin\alpha - (x - C\cos\gamma)\cos\alpha.\frac{A}{\sqrt{n}}}{(y - C\sin\gamma)^2 + (x - C\cos\gamma)^2} - \frac{AA}{BB} = 0.$$

$$AA\,BB - AA\,e^{2\eta}$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunkdes Parallelkreises durch x'', y'' und den Halbsser durch P, so ist

$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 = PP.$$

d man findet dann

$$x'' = C\cos\gamma + \frac{2BB\sqrt{n}.\cos\alpha}{ABB - Ae^{2\eta}}$$

Meridiane liegen, als die Coordinatenaxen annimm und zwar die erste als die Axe der x; die zwei als die Axe der y. Man muss daher die beiden Gl chungen haben

$$y'' = 0, \quad x' = 0.$$

und da allgemein

$$y'' = -x'' \, tang\, \alpha + C \cos\gamma \, tang\, \alpha + C \sin\gamma$$

$$x' = +y' \, tang\, \alpha - C \frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha} - \frac{\sqrt{n}}{A \cos\alpha}$$

so muss man die Relationen

$$tang\, \alpha = 0,$$

$$C \cos\gamma \, tang\, \alpha + C \sin\gamma = 0,$$

$$C \frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{\sqrt{n}}{A \cos\alpha} = 0,$$

haben. Hieraus ergiebt sich

$$\alpha = 0,$$

$$C \sin\gamma = 0,$$

$$C \cos\gamma + \frac{\sqrt{n}}{A} = 0.$$

§. 159.

Die Coordinaten der Mittelpunkte der Meridian und der Parallelkreise erhält man hierdurch nach § 153 und 154.

$$x' = 0, \quad y' = \frac{\sqrt{n}}{A} \cdot cotg(\lambda - 6),$$

$$M = \frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{1}{\sin(6-\lambda)}$$

$$y'' = 0, \quad x'' = \frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{BB + e^{2\eta}}{BB - e^{2\eta}}$$

$$P = \frac{2B\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{e^{\eta}}{e^{2\eta} - BB}$$

und die allgemeinen Coordinaten (§. 152.) werden

$$x = -\frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{e^{2\eta} - BB.}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda-6) + BB}$$

$$y = \frac{2B\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{e^{\eta} \sin(\lambda-6)}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda-6) + BB}.$$

§. 160.

Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so erhält man §. 134.

$$\theta = log\ tang(45 + \tfrac{1}{2}p)$$

wo p die geographische Breite bedeutet, und da

$$\eta = 2\theta\sqrt{n}$$

so wird

$$e^{-\eta} = tang(45 - \tfrac{1}{2}p)^{2\sqrt{n}}$$

folglich wenn man diesen Werth in vorige Ausdrücke der Coordinaten substituirt, und zugleich statt λ, $2l\sqrt{n}$ setzt.

$$x = -\frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{1 - BB\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{4\sqrt{n}}}{1 - 2B\cos(2l\sqrt{n} - 6)\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{2\sqrt{n}} + BB\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{4\sqrt{n}}}$$

$$y = \frac{2B\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{\sin(2l\sqrt{n} - 6)\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{2\sqrt{n}}}{1 - 2B\cos(2l\sqrt{n} - 6)\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{2\sqrt{n}} + BB\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{4\sqrt{n}}}.$$

§. 161.

Um aus diesen beiden Gleichungen einige Projectionen besonders abzuleiten, mache man noch folgende Aenderungen der Constanten. Man nehme

$$Ah = n,$$
$$2\sqrt{n} = k.$$
$$6 = 2\sqrt{n}.\ g.$$

so dass an die Stelle der drei ersten Constanten, A, n, 6, die neuen h, k, g, eingeführt werden. Dann erhält man

$$x = -\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - BB\,tang(45 - \frac{1}{2}p)^{2k}}{1 - 2B\cos k(l - g)\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{k} + BB\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{2k}}$$

$$y = \frac{4Bh}{k} \cdot \frac{\sin k(l - g)\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{k}}{1 - 2B\cos k(l - g)\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{k} + BB\,tg(45 - \frac{1}{2}p)^{2k}}$$

§. 162.

Setzen wir $k = 0$, so werden scheinbar beide Gleichungen unendlich; allein man kann doch bestimmte Werthe aus denselben ableiten, wenn man zuerst k nur so klein annimmt, dass die höhern Po-

tenzen vernachlässigt werden können. Da nun in diesem Falle

$$tang(45 - \tfrac{1}{2}p)^k = 1 + k\ log\ tang(45 - \tfrac{1}{2}p)$$
$$tang(45 - \tfrac{1}{2}p)^{2k} = 1 + 2k\ log\ tang(45 - \tfrac{1}{2}p)$$
$$sin\ k\ (l - g) = k\ (l - g)$$
$$cos\ k\ (l - g) = 1.$$

so erhält man

$$y = 4Bh.\ \frac{(l-g)\ (1 + k\ log\ tg(45 - \tfrac{1}{2}p))}{(1 - B^2 - 2Bk\ (1 - B)\ log\ tg(45 - \tfrac{1}{2}p)}$$

und wenn jetzt $k = 0$ genommen wird

$$y = \frac{4Bh}{(1-B)^2}\ (l - g).$$

Eben so kommt auch

$$x = -\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - BB - 2kBB\ log\ tg(45 - \tfrac{1}{2}p)}{(1-B)^2 - 2Bk\ (1-B)\ log\ tg(45 - \tfrac{1}{2}p)}$$
$$= -\frac{2h}{k} \cdot \frac{\frac{1+B}{1-B} - \frac{2kBB}{(1-B)^2}\ log\ tg(45 - \tfrac{1}{2}p)}{1 - \frac{2Bk}{1-B}\ log\ tg(45 - \tfrac{1}{2}p)}$$

oder wenn man mit dem Nenner wirklich dividirt

$$x = +\frac{2h}{k} \cdot \frac{B+1}{B-1} - \frac{4Bh}{(B-1)^2}\ log\ tang(45 - \tfrac{1}{2}p).$$

Man sieht, dass wenn x nicht unendlich gross werden soll, wenn man $k = 0$ setzt, $B + 1$ durch k theilbar seyn muss; man nehme daher

$$B + 1 = fk$$

so wird

$$B - 1 = fk - 2,$$

und wenn man diese Werthe in vorige Gleichung setzt, und dann $k = 0$ nimmt

$$x = -hf + h\ log\ tang(45 - \tfrac{1}{2}p)$$
$$y = -h(l - g).$$

Vergleicht man diese Werthe mit den §. 123. angegebenen, so sieht man, dass beide mit einander übereinstimmen, wenn nur x und y mit einander vertauscht werden, welches an sich gleichgültig ist, und ausserdem die Constanten $f = 0$, $g = 0$, $h = -a$ gesetzt werden, da

$$log\ tang(45 - \tfrac{1}{2}p) = -log\ tang(45 + \tfrac{1}{2}p).$$

ist. Wir haben daher die Mercator'sche Projections-

art aus der allgemeinen Darstellungsmethode durch unsere Operationen abgeleitet, und wir schliessen daraus, dass diese Projectionsart die Erdoberfläche in ihren unendlich kleinen Theilen ähnlich darstellt.

§. 163.

Um das bei dieser Projectionsart statt findende Vergrösserungsverhältniss zu haben, hat man aus §. 151.

$$m = \frac{4Bn\, e^{\eta}}{RA.(e^{2\eta} - 2e^{\eta}\, B\, cos(6-\lambda) + BB}$$

oder da $R = \rho\, cos\, p$, wenn durch ρ der Halbmesser der Erde bezeichnet wird, so erhält man auch

$$m = \frac{4Bh\, tg(45 - \frac{1}{2}p)^k}{\rho\, cos\, p\,[1 - 2B\, cos\, k(g-l)\, tg(45-\frac{1}{2}p)^k + BB\, tg(45-\frac{1}{2}p)^{2k}]}$$

$$= \frac{h}{\rho\, cos\, p}.$$

§. 164.

Setzt man in den Formeln für x und y, §. 161. $B = 1$, $k = 1$, so folgt nach den gehörigen Reductionen

$$x = -2h.\frac{sin\, p}{1 - cos\, p\, cos(l-g)}$$

$$y = +2h.\frac{sin(l-g)\, cos\, p}{1 - cos\, p\, cos(l-g)}.$$

Bestimmt man die Constante g noch dadurch, dass man sie $= 90°$ annimmt, so erhält man

$$x = -2h\,\frac{sin\, p}{1 + cos\, p\, sin\, l}$$

$$y = +2h.\frac{cos\, l\, cos\, p}{1 + cos\, p\, sin\, l}.$$

welches die stereographische Aequatorealprojection (§. 114.) ist. Das Vergrösserungsverhältniss wird durch die Gleichung

$$m = \frac{2h}{\rho\,(1 + cos\, p\, sin\, l)}$$

angegeben, wo ρ den Halbmesser der Erde bedeutet.

§. 165.

Da die Grösse k sich durch Ausziehung der Quadratwurzel aus n findet, so kann man dieselbe sowohl positiv als negativ nehmen, und wir wollen untersuchen, welche Aenderung hierdurch in Werthe von x und von y hervorgebracht wird. Bezeichnet man der Kürze wegen die Grösse $tang(45 - \frac{1}{2}p)$ durch t, so werden die Formeln von x und y (§. 161.)

$$x = -\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - BB.\ t^{2k}}{1 - 2B\ cos\,k\,(l-g).\ t^{k} + BB\,t^{2k}}$$

$$y = +\frac{4Bh}{k} \cdot \frac{sin\,k\,(l-g).\ t^{2k}}{1 - 2B\ cos\,k\,(l-g)\ t^{k} + BB\ t^{2k}}$$

folglich wenn man k negativ nimmt,

$$x = +\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - BB.\ t^{-2k}}{1 - 2B\ cos\,k\,(l-g).\ t^{-k} + BB.\ t^{-2k}}$$

$$y = +\frac{4Bh}{k} \cdot \frac{sin\,k\,(l-g).\ t^{-k}}{1 - 2B\ cos\,k\,(l-g).\ t^{-k} + BB\ t^{-2k}}$$

Man multiplicire die beiden Gleichungen Zähler und Nenner durch t^{2k}, so wird

$$x = \frac{2h}{k} \cdot \frac{t^{2k} - B.}{t^{2k} - 2B\ cos\,k\,(l-g)\ t^{k} + BB}$$

$$y = \frac{4Bh}{k} \cdot \frac{sin\,k\,(l-g).\ t^{k}}{t^{2k} - 2B\ cos\,k\,(l-g)\ t^{k} + BB}$$

und wenn man noch

$$B = \frac{1}{B'}$$

setzt, und reducirt

$$x = -\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - B'B'.\ t^{2k}}{1 - 2B'\ cos\,k\,(l-g)\ t^{k} + B'B'\ t^{2k}}$$

$$y = +\frac{4B'h}{k} \cdot \frac{sin\,k\,(l-g)\ t^{k}}{1 - 2B'\ cos\,k\,(l-g).\ t^{k} + B'B'.\ t^{2k}}.$$

Da diese Gleichungen ganz die Form der ursprünglichen haben, so folgt, dass wenn statt $+k$

esetzt wird, blos statt B sein reciproker Werth men zu werden braucht.

§. 166.

Die Halbmesser der Meridiane

$$M = \frac{\sqrt{n}}{A.\ sin\,(6 - \lambda)}$$

der Parallelkreise

$$P = \frac{4B\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{e^{\eta}}{e^{2\eta} - BB}$$

ten durch die Einführung der Werthe von $\frac{\sqrt{n}}{A}$ folgende Form

$$M = \frac{2h}{k} \cdot \frac{1}{sin\ k\ (g - l)},$$

$$P = \frac{4Bh}{k} \cdot \frac{t^k}{1 - BB\,t^{2k}} \quad \text{oder } 180°.$$

Setzt man $g - l = 0$, so wird M unendlich s, und wenn

$$t^{-2k} = BB.$$

wird auch P unendlich, und die Werthe von x y verschwinden beide durch diese Voraussetzun-

Da ein mit unendlich grossem Halbmesser beiebener Kreis als eine gerade Linie betrachtet den muss, so folgt, dass alle Oerter deren Länge l, und deren Breite aus der Gleichung

$$t^{-2k} = BB$$

mmt werden, auf geraden Linien liegen. Dieser adlinigte Meridian dient als Axe der x, und der adlinigte Parallelkreis als Axe der y, und ihren chschnittspunkt kann man den Mittelpunkt der te nennen. Nimmt man also die geographische te dieses Punktes $= p'$, so wird

$$BB = tang\,(45 - \tfrac{1}{2}\,p')^{-2k}$$

n müssen.

so findet sich die Ordinate der Mittelpunkte
elkreise,

$$\frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{BB + e^{2\eta}}{BB - e^{2\eta}}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{e^{-2\eta} + B^{-2}}{e^{-2\eta} - B^{-2}}$$

nch

$$= -L \frac{t^{2k} + t'^{2k}}{t^{2k} - t'^{2k}}$$

$$= +L \frac{t'^{2k} + t^{2k}}{t'^{2k} - t^{2k}}$$

für jeden beliebigen Werth von k die Pro-
verzeichnet werden kann, indem man die
r Parallelkreise und der Meridiane, so wie
sse ihrer Halbmesser erhält.

§. 169.

beiden Coordinaten x und y selbst, finden
s den Formeln §. 165. mit Einführung unserer
Bezeichnungen

$$+ L. \frac{t'^{2k} - t^{2k}}{t'^{2k} + 2\cos k\,(l-g).\, t'^{k}\, t^{k} + t^{2k}}$$

$$= + 2L. \frac{\sin k(l-g).\, t^{k}\, t'^{k}}{t'^{2k} + 2\cos k\,(l-g)\, t'^{k}\, t^{k} + t^{2k}}$$

man bei der Bestimmung von B aus der qua-
chen Gleichung $BB = t'^{-2k}$ das negative Vor-
n nimmt. Das Vergrösserungsverhältniss er-
ian

$$= \frac{2kL}{p \cos p} \cdot \frac{t^{k}\, t'^{k}}{t'^{2k} + 2\cos k\,(l-g)\, t'^{k}\, t^{k} + t^{2k}}$$

er §. 163. angegebenen Formel. Bezeichnet man
be an der Stelle der Charte wo $p = p'$, $l = g$
urch m', so wird

$$m' = \frac{kL}{2\varrho \cos p'}.$$

- die Coordinaten der Oberfläche einer Kugel, leichung durch

$$xx + yy + zz = aa.$$

ellt wird, wo a den Halbmesser der Kugel t, so hat man

$$x = a \cos t \cos u,$$
$$y = a \sin t \cos u,$$
$$z = a \sin u.$$

nd u zwei Winkel bedeuten, die man als die phische Länge und Breite des Punktes ansehen Dass ferner diese drei angenommenen Werthe , y, z der angegebenen Relation zwischen x, für die Kugeloberfläche Genüge leisten, sieht araus, dass

$$\sin t^2 . \cos u^2 + \sin t^2 \cos u^2 + \sin u^2 = 1$$

wie die wirkliche Entwickelung zeigt.

§. 171.

Da die drei Coordinaten X, Y, Z von x, y, z ngig sind, und letztere durch t und u ausgeit werden, so folgt, dass auch X, Y, Z als tionen von t und u dargestellt werden können. wird daher durch Differentiation der sechs Funcn von x, y, z, X, Y, Z, für die Differentiale dy, dz, dX, dY, dZ folgende Gleichungen erm

$$dx = adt + a'du.$$
$$dy = bdt + b'du.$$
$$dz = cdt + c'du.$$
$$dX = Adt + A'du$$
$$dY = Bdt + B'du$$
$$dZ = Cdt + C'du.$$

Die Bedingung, dass die abzubildende Oberfläche abgebildeten in den unendlich kleinen Theilen lich sey, erfordert, dass in beiden Oberflächen i unendlich kleine Dreiecke einander ähnlich sind, h. dass zwei von einem Punkte in beiden Flächen gehende gerade Linien welche die Linearelemente stellen, einander ähnlich seyn, und zugleich gleich e Winkel einschliessen.

werden, der Cosinus des Winkels, den beide mit einander machen, durch

$$\frac{(aa' + bb' + cc')\,kk' + (aa' + bb' + cc')\,(k + l)\,dt\,du}{\sqrt{[(aa + bb + cc)\,dt^2 + 2(aa' + bb' + cc')\,dt\,du + (a'a' + b'b' + c'c')\,du^2]}\;\sqrt{[(aa + bb + cc)\,kk' + 2(aa' + bb' + cc')\,kl\,dt\,du + (a'a' + b'b' + c'c')\,ll\,du^2]}}$$

ausgedrückt wird. Eben so erhält man den Winkel der correspondirenden Elemente in der Darstellung, indem man statt a, b, c, a', b', c', die Grössen A, B, C, A', B', C' setzt, und es ist einleuchtend, dass wenn statt

$$AA + BB + CC,$$
$$AA' + BB' + CC',$$
$$A'A' + B'B' + C'C',$$

in diesem zweiten Werthe des Cosinus, die nach vorigem §. gleichgeltenden Grössen

$$mm(aa + bb + cc),$$
$$mm(aa' + bb' + cc'),$$
$$mm(a'a' + b'b' + c'c')$$

gesetzt werden, beide Ausdrücke ganz identisch seyn müssen. Die drei Gleichungen des vorigen Paragraphs drücken also sowohl die Proportionalität der Linearelemente, als auch die Gleichheit der Winkel aus.

§. 174.

Bezeichnen wir die Differentialgleichung

$$(aa + bb + cc)^2\,dt^2 + 2(aa' + bb' + cc')\,dt\,du + (a'a' + b'b' + c'c')\,du^2 = 0$$

durch $\omega = 0$, so lässt dieselbe sich in zwei Factoren, welche eine unmögliche Form haben, zerlegen. Diese Factoren sind nämlich:

$$(aa + bb + cc)\,dt + (aa' + bb' + cc')\,du + i\sqrt{[aa + bb + cc)\,(a'a' + b'b' + c'c') - (aa' + bb' + cc')^2]}\,du = 0, \text{ und}$$

$$(aa + bb + cc)\,dt + (aa' + bb' + cc')\,du - i\sqrt{[(aa + bb + cc)\,(a'a' + b'b' + c'c') - (aa' + bb' + cc')^2]}\,du = 0.$$

wo die Grösse unter dem Radicalzeichen immer positiv ist, da sie auch durch die Summe dreier Quadrate

$$(ab' - a'b)^2 + (ac' - a'c)^2 + (bc' - b'c)^2$$

ausgedrückt werden kann. Der Buchstabe i bedeutet wie früher die eingebildete Grösse $\sqrt{-1}$, und jeder einzelne Factor musste gleich Null gesetzt werden.

§. 175.

Es ist bekannt, dass eine Differentialgleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen sich im Allgemeinen vermittelst eines sogenannten integrirenden Factors integriren lässt. Bezeichnen wir also den integrirenden Factor der ersten durch R, den der zweiten durch R', so wird, wenn das Integral der ersten durch $p + iq = \text{Const.}$, das der zweiten durch $p - iq = \text{Const.}$ ausgedrückt werden, und man hat

$$(aa + bb + cc)\,dt + (a'a' + b'b' + c'c')\,du + i\sqrt{[(aa + bb + cc)(a'a' + b'b' + c'c') - (aa' + bb' + cc')^2]}\,du = \frac{1}{R}(dp + idq).$$

$$(aa + bb + cc)\,dt + (aa' + bb' + cc')\,du - i\sqrt{[(aa + bb + cc)(a'a' + b'b' + c'c') - (aa' + bb' + cc')^2]}\,du = \frac{1}{R'}.(dp - idq).$$

folglich wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt und bedenkt, dass das vor dem Gleichheitszeichen stehende Product gleich

$$\left[\begin{array}{l}(aa + bb + cc)\,dt^2 \\ + 2(aa' + bb' + cc')\,dt\,du \\ + (a'a' + b'b' + c'c')\,du^2\end{array}\right].(aa + bb + cc) = \omega(aa + bb + cc)$$

wird, so erhält man

$$\omega(aa + bb + cc) = \frac{1}{RR'}(dp^2 + dq^2).$$

Setzt man ferner der Kürze wegen

$$RR'(aa + bb + cc) = \frac{1}{n}$$

so kommt die Gleichung

$$\omega = n(dp^2 + dq^2).$$

in welcher n eine endliche Function der veränderlichen u und t seyn muss.

§. 167.

Auf gleiche Weise kann man nun auch die Differentialgleichung

$$(AA + BB + CC)\,dt^2 + 2(AA' + BB' + CC')\,dt\,du + (A'A' + B'B' + C'C')\,du^2 = 0$$

behandeln. Bezeichnet man dieselbe durch $\Omega = 0$, so lassen sich aus derselben zwei Integrale finden, die wir durch $P + iQ = \text{Const.}$ und $P - iQ = \text{Const.}$ bezeichnen wollen, so dass durch eine gleiche Reihe von Schlüssen wie im vorigen Paragraph, die Gleichung

$$\Omega = N\,(dP^2 + dQ^2)$$

gefunden wird, wo N eine endliche Function von t und u bedeutet. Man sieht nun, dass die Grössen ω, Ω nichts anders als die Ausdrücke $dx^2 + dy^2 + dz^2$, $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ angeben, und da vermöge der Bedingung der Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen (§. 172.)

$$m\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2},$$

seyn soll, so hat man auch $mm\omega = \Omega$, oder wenn statt ω und Ω ihre Werthe gesetzt werden

$$mm\eta\,(dp^2 + dq^2) = N(dP^2 + dQ^2) \text{ oder}$$

$$\frac{mm\eta}{N} = \frac{(dP + idQ).\,(dP - idQ)}{(dp + idq).\,(dp - idq)}.$$

§. 177.

Da die vor dem Gleichheitszeichen befindliche Grösse $\frac{mm\eta}{N}$ eine endliche Function von t und u ist, so folgt, dass in dem hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Bruche, der Zähler durch den Nenner theilbar seyn muss, und dies erfordert, dass entweder

$dp + idQ = h(dp + idq)$ und $(dp - idQ) = h'(dp - idq)$.

oder

$dP + idQ = h''(dp - idq)$ und $(dP - idQ) = h'''(dp + idq)$.

Setzt man also $dp + idq = 0$, so wird zugleich $dP + idQ = 0$, folglich sind die Grössen $p + iQ$, $P + iQ$ zu gleicher Zeit constant; die eine muss also eine Function der andern seyn. Dieselben Schlüsse

lassen sich auch auf die andern drei Gleichungen anwenden, so dass man entweder

$P + iQ = \varphi(p + iq)$ und $P - iQ = \psi(p - iq)$. oder

$P + iQ = \psi(p - iq)$ und $P - iQ = \varphi(p + iq)$.

annehmen muss. Es ist übrigens leicht einzusehen, dass beide Voraussetzungen gleiche Resultate geben, wovon nur das eine rücksichtlich des Vorzeichens verschieden ist. Ausserdem muss die Function φ mit der Function ψ von einerlei Form seyn, weil beide Grössen $P + iQ$, $P - iQ$, nur durch $+ i$ und $- i$ unterschieden sind, und man wird daher die Aufgabe schon durch die einzige Gleichung

$$P + iQ = \varphi(p + iq).$$

aufgelöst haben, indem man P dem reellen, und iQ dem imaginären Theile der Function gleich setzt.

§. 178.

Wenn man der gebräuchlichen Bezeichnungsart zufolge annimmt, dass die Differentiale

$d.\ \varphi(p + iq) = \varphi'(p + iq).\ (dp + idq)$,

$d.\ \psi(p - iq) = \psi'(p - iq).\ (dp - idq)$,

so erhält man, da wir vorher setzten

$$P + iQ = \varphi(p + iq)$$
$$P - iQ = \psi(p - iq).$$

die beiden Gleichungen

$$dP + idQ = \varphi'(p + iq).\ (dp + idq)$$
$$dP - idQ = \psi'(p - iq).\ (dp - idp).$$

und hieraus

$$\frac{(dP + idQ).\ (dP - idQ)}{(dp + idq).\ (dp - idq)} = \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq).$$

also nach §. 176.

$$\frac{mnn}{N} = \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq).$$

Nun ist ferner

$$\Omega = N\,(dP^2 + dQ^2), \quad \omega = n\,(dp^2 + dq^2)$$

folglich wenn die erste Gleichung durch die zweite dividirt wird

$$\frac{N}{n} = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{dp^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2}$$

und wenn man diese Werthe in der vorigen Gleichung

$$\frac{N}{n}\,\varphi'(p+iq).\,\psi'(p-iq).$$

erhält man

$$\frac{dR^2+dq^2}{dP^2+dQ^2}\cdot\varphi'(p+iq).\,\psi'(p-iq)\Big].$$

Vergrösserungsverhältniss gefunden ist.

§. 179.

...u der Anwendung dieser Methode einige ... haben, wollen wir das abgeplattete Sphä... ...nes durch Umdrehung einer Ellipse um ... Axe entsteht, betrachten, und dessen Dar... ... einer Ebene und auf der Kugel unter... ...zeichnet man die grosse Axe der Ellipse ...die kleine durch $2b$, legt den Anfangspunkt ...naten in den Mittelpunkt der Ellipse, und ... Ordinate z auf der Umdrehungsaxe, so ...lich die Gleichung dieses Sphäroïds

$$zz + bb(xx+yy) = aa\,bb$$

wird die drei Coordinaten x, y, z so be...önnen, dass

$$cos\,t.\,cos\,u,\quad y = a\,sin\,t\,cos\,u,\quad z = b\,sin\,u$$

...ifferentiirt man diese drei Gleichungen um ...t der Differentiale das Linearelement aus... zu können, so erhält man

$$\hat{a}(-\,sin\,t\,cos\,u.\,dt - cos\,t\,sin\,u.\,du)$$
$$a(+\,cos\,t\,cos\,u.\,dt - sin\,t\,sin\,u.\,du)$$
$$b.\,cos\,u.\,du$$

findet hieraus $\omega = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

$$cos\,u^2\,dt^2 + (aa\,sin\,u^2 + bb\,cos\,u^2)\,du^2.$$

t man dies Null und lösst die quadratische ...g auf, so kommt

$$dt = i\,\frac{\sqrt{aa\,sin\,u^2 + bb\,cos\,u^2}}{a.\,cos\,u}.\,du.$$

man Zähler und Nenner durch $cos\,u$, so wird

$$dt = i\,du\,\sqrt{aa\,tang\,u^2 + bb}$$

diese Gleichung zu integriren, setze man $= b\,tang\,v$, so wird

$$\sqrt{a\,tang\,u^2 + bb} = \frac{b}{cos\,v}$$

Man hat daher

$$\int \frac{dr}{(1-ss\,rr)(1-rr)} =$$

$$\frac{1}{2(1-ss)}\left[\int\frac{dr}{1+r}+\int\frac{dr}{1-r}-ss\int\frac{dr}{1-sr}\right.$$

$$\left.-ss\int\frac{dr}{1+sr}\right] = \frac{1}{2(1-ss)}\left[\log(1+r)-\log(1-r)\right.$$

$$\left.-s\log(1-sr)-s\log(1+sr)\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-ss)}\log\left[\frac{1+\sin v}{1-\sin v}\cdot\left(\frac{1-s\sin v}{1+s\sin v}\right)^{s}\right]$$

$$= \frac{1}{1-ss}\log\left[tg(45+\tfrac{1}{2}v)\cdot\left(\frac{1-s\sin v}{1+s\sin v}\right)^{\frac{s}{2}}\right].$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck noch mit $\pm i(1-ss)$, so erhält man der vorigen Differentialgleichung zufolge

$$\Omega \pm i\log tg(45+\tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-s\sin v}{1+s\sin v}\right)^{\frac{s}{2}} = \text{Const.}$$

Die Gleichung der Ebene in welcher das Sphäroïd abgebildet werden soll, sey $Z = 0$, so ist das Linearelement $\sqrt{dX^2+dY^2}$, folglich $\Omega = dX^2+dY^2 = 0$. Dies giebt $dX \pm i\,dY = 0$, und wenn man integrirt $X \pm iY = \text{Const.}$ Man hat daher für die Darstellung des Sphäroïds in der Ebene die Gleichung

$$X \pm iY = \varphi\left[t \pm i\log\left[tg(45+\tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-s\sin v}{1+s\sin v}\right)^{\frac{s}{2}}\right]\right]$$

wo φ eine willkührliche Function bedeutet.

§. 180.

Nimmt man die Form der Function linear, so dass wenn k eine beliebige Constante bedeutet.

$$\varphi\left[t \pm i\log\left[tang(45+\tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-s\sin v}{1+s\sin v}\right)^{\frac{s}{2}}\right]\right]$$

$$= kt \pm ki\log\left[tang(45+\tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-s\sin v}{1+s\sin v}\right)^{\frac{s}{2}}\right]$$

gesetzt wird, so hat man die Gleichung

$$X \pm iY = kt \pm ki \log \left[tg(45 + \tfrac{1}{2}v) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right]$$

folglich wenn man sowohl die reellen als die imaginären Theile einander gleich nimmt,

$$X = kt, \quad Y = k \log tg(45 + \tfrac{1}{2}v) - \frac{k\varepsilon}{2} \log \frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}.$$

Setzt man hierin $\varepsilon = 0$, so verwandelt sich das elliptische Sphäroïd in eine Kugel, und die Bestimmungen

$$X = kt, \quad Y = k \log tang(45 + \tfrac{1}{2}v)$$

geben die Mercator'sche Projectionsart.

§. 181.

Eine andere sehr brauchbare Darstellungsart erhält man, indem man für die Form der Function eine imaginäre Exponentialfunction wählt, und $\varphi(\omega) = k. e^{i\omega\lambda}$ setzt, wo k und λ zwei willkührliche constante Grössen bedeuten. Dann wird

$$X + iY = k. e^{i\lambda t}. tang(45 - \tfrac{1}{2}v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

und da bekanntlich $e^{i\lambda t} = \cos \lambda t + i \sin \lambda t$, so ist auch

$$X + iY = k \cos \lambda t. tang(45 - \tfrac{1}{2}v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

$$+ ik \sin \lambda t. tang(45 - \tfrac{1}{2}v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

folglich erhält man für X und Y die Gleichungen

$$X = k. \cos \lambda t. tang(45 - \tfrac{1}{2}v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

$$Y = k. \sin \lambda t. tang(45 - \tfrac{1}{2}v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

und wenn man $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$ setzt, so giebt diese Darstellung die stereographische Projectionsart.

§. 182.

er Gleichung $aa\,zz + bb\,(xx + yy)$
so erhält man $aa\,zz + bb\,xx$
ie Gleichung des ersten Meridians
an diese Gleichung, so kommt
$= 0$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{bb}{aa} \cdot \frac{x}{z}$
rin statt z seinen Werth
$-\sqrt{xx}$
nt
$$\frac{x}{\sqrt{aa - xx}} \cdot$$
tlich $\frac{dz}{dx}$ die trigonometrische Tan-
welchen die Berührungslinie mit
ssen macht, und wenn wir dieses
nden, so wird $\frac{dz}{dx}$ die Tangente
er Polhöhe angeben. Es ist aber,
zt wird, auch $a \sin t \cos u = 0$,
und hieraus wird $x = a \cos u$,
$n\,u$, also ohne Rücksicht auf das
es man wegen der Wurzelauszie-
n kann, $\frac{dz}{dx} = \frac{b}{a}\ cot\ u$. Ver-
Ausdruck mit $a\ tang\ u = b\ tang\ v$
nan $cot\ v = \frac{dz}{dx}$, folglich ist v die

§. 183.

id dadurch entstanden, dass die
grosse Axe drehte, so muss man
a die Axe um welche die Drehung
bezeichnet wird. Wir setzten

$\varepsilon = \frac{z - iy}{z}$ und man s

... ε selbst imag

... den Umständen die Darst

... setze man $\varepsilon = \varepsilon$, so

... $\frac{1 - \sin v}{1 + \sin v}$ in

... ervon muss der Logarithmus

... Ausdruck der Functio

$$\ldots = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right).$$

... eorie der imaginären Grö

... ken bedeutet

$$\ldots = \frac{\ldots}{\ldots}$$

... nimmt man ... $\sin\zeta = \varepsilon \sin v$,

... $\sin\zeta = \sin v$, folglich

$$\ldots = \ldots \log\tan\ldots = \varepsilon \sin$$

... Ausdruck, wie für das al

... ...

$X = A.\cos T.\cos U$, $Y = A.\sin T.\cos U$, $Z = A.\sin U$,
rd, so geschieht der Gleichung der Kugeloberfläche
nüge, und man hat indem diese Gleichungen diffe-
ntiirt werden
$dX = A.(-\sin T.\cos U.dT - \cos T.\sin U.dU)$
$dY = A.(+\sin T.\cos U.dT - \sin T.\sin U.dU)$
$dZ = A.\cos U.dU.$
glich $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \Omega = AA\cos U^2 dT^2$
$AA.dU^2$. Setzt man dies Null, so kommt
$U.dT \pm i.dU = 0$ oder $dT \pm i\frac{dU}{\cos U} = 0.$
ervon ist das Integral $T \pm i\log.\tang(45 + \frac{1}{2}U)$
Const. Setzt man dies der für das Ellipsoïd ge-
ndenen Function (§. 179.) gleich, so erhält man für
e Darstellung des Ellipsoïds auf der Kugel
$T \pm i\log.\tang(45 + \frac{1}{2}U)$
$= \varphi\left[t \pm i\log\left[\tang(45 + \frac{1}{2}v)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right]$
nd bei jeder willkührlichen Annahme der Function
lass man T dem reellen und $i\log\tang(45 + \frac{1}{2}U)$
m imaginären Theile gleich setzen.

§. 185.

Wir wollen als Beispiel der allgemeinen Function
ne besondere Form beilegen, so dass wir $\varphi w = w$
$i\log k$ setzen, wo k eine willkührliche Constante
deutet. Man hat dann
$T \pm i\log\tang(45 + \frac{1}{2}U)$
$= t \pm i\log\left[k\tang(45 + \frac{1}{2}v)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right].$
Hieraus ergeben sich zur Bestimmung von T und
die Gleichungen
$T = t,\quad \tang(45 + \frac{1}{2}U)$
$= k\tang(45 + \frac{1}{2}v)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$
Um das Vergrösserungsverhältniss m zu bestim-
en, hat man aus §. 178.
$m = \sqrt{\left[\frac{\Omega}{\omega}\cdot\frac{dp^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2}\cdot\varphi'(p+iq).\psi'(p-iq)\right]}.$

wo die Formen φ', ψ' gleichgeltend sind. Nun war ferner

$$\omega = aa\cos u^2\,dt + (aa\sin u^2 + bb\cos u^2)du^2$$
$$\Omega = AA\cos U^2 . dT^2 + AA.\,dU^2$$

$$dp \pm idq = dt \pm i\,\frac{\sqrt{aa\sin u^2 + bb\cos u^2}}{a\cos u}\,du.$$

$$dP \pm idQ = dT \pm i\,\frac{dU}{\cos U}.$$

$$dp^2 + dq^2 = dt^2 + \frac{aa\sin u^2 + bb\cos u^2}{aa\cos u^2}\,du^2$$

$$dP^2 + dQ^2 = dT^2 + \frac{dU^2}{\cos u^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die Factoren, die sich aufheben, wegläßt

$$\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{dp^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2} = \frac{AA.\,\cos u^2}{aa.\,\cos u^2}.$$

Ferner war $\varphi w = w + i\log k$, also $\varphi' w = 1 = \psi' w$, und man findet $m = \frac{A\cos U}{a\cos u}$. Ausserdem hatten wir $a\,tang\,u = b\,tang\,v$, und da $b = a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}$, so wird $tang\,u = tang\,v\,\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}$,

$$1 + tang\,u^2 = \frac{1}{\cos v^2} - \varepsilon\varepsilon\,tang\,v^2$$

folglich $$\cos u = \frac{\cos v}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für m, so wird

$$m = \frac{A}{a} \cdot \frac{\cos U}{\cos v} \cdot \sqrt{1-\varepsilon\varepsilon.\,\sin v^2}$$

Wir müssen nun noch $\cos U$ durch v ausdrücken; hierzu nehme man die Gleichung

$$tang(45 + \tfrac{1}{2}U) = k\,tang(45 + \tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

quadrire dieselbe, addire auf beiden Seiten die Einheit, so kommt

$$\frac{1}{+\frac{1}{2}U)^2} = 1 + kk\,tang(45+\tfrac{1}{2}v)^2\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\varepsilon}.$$

un weiss man aber, dass $cos(45+\frac{1}{2}U) = \frac{1}{}$ in U, folglich erhält man

$$\frac{}{in\,U} = 1 + kk\,tang(45+\tfrac{1}{2}v)^2\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\varepsilon}$$

$$in\,U = \frac{kk.tang(45+\frac{1}{2}v)^4\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\varepsilon} - 1.}{kk\,tang(45+\frac{1}{2}v)^2\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\varepsilon} + 1.}$$

s dieser Gleichung findet man leicht

$$= \frac{k\cos v\,(1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{kk\sin(45+\frac{1}{2}v)^2(1-\varepsilon\sin v)^{\varepsilon}+\cos(45+\frac{1}{2}v)^2(1+\varepsilon\sin v)^{\varepsilon}}$$

$$A \quad \frac{k.(1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{kk\sin(45+\frac{1}{2}v)^2(1-\varepsilon\sin v)^{\varepsilon}+\cos(45+\frac{1}{2}v)^2(1+\varepsilon\sin v)^{\varepsilon}}$$

§. 186.

Vermittelst dieses Vergrösserungsverhältnisses n man für die Darstellung eines nicht zu grossen ls des elliptischen Sphäroïds auf der Kugel, einen enden Werth von k auffinden, so dass bei Anndung desselben die Darstellung sich der vollkommn Aehnlichkeit nähert. Dies wird der Fall seyn, nn das Vergrösserungsverhältniss m für die kleinnd die grösste Breite v des auf dem Sphäroïd ndlichen, abzubildenden Theils der Oberfläche he Werthe erhält. Man hat dann, indem die te Breite durch v', die grösste durch v'' bezeichrd, zur Bestimmung von k die Gleichung

$$\frac{+\frac{1}{2}v')^2(1-\varepsilon\sin v')^{\varepsilon}+\cos(45+\frac{1}{2}v')^2(1+\varepsilon\sin v')^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v'^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

$$\frac{dm}{m} = -\sin U.\frac{dv}{\cos v} + \sin U.\frac{\varepsilon\varepsilon\cos v}{1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2}$$
$$+ \sin v.\frac{dv}{\cos v} - \sin v.\frac{\varepsilon\varepsilon\cos v\,dv}{1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2}$$
$$= \frac{dv}{\cos v}(\sin v - \sin U) - \frac{\varepsilon\varepsilon\cos v.dv}{1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2}(\sin v - \sin U)$$
$$= \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\,dv}{\cos v\,(1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2)}(\sin v - \sin U).$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Differentialcoeffi-
nt $\frac{dm}{dv}$ dann Null wird, wenn $\sin v - \sin U = 0$,
r $U = v$ wird. Für diesen Werth wird daher
ein Minimum oder ein Maximum. Setzt man in
sem Falle $v = V$, also $U = V$, so giebt die Glei-
ng

$$ang(45 + \tfrac{1}{2}U) = k.tang(45 + \tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$k = \left(\frac{1+\varepsilon\sin V}{1-\varepsilon\sin V}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\sin V = \frac{k^{\frac{2}{\varepsilon}} - 1}{k^{\frac{2}{\varepsilon}} + 1}.\frac{1}{\varepsilon}.$$

§. 188.

Um zu entscheiden, ob bei diesem Werthe von
das Vergrösserungsverhältniss ein Maximum oder
n Minimum wird, muss man die Gleichung

$$\frac{dm}{m} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\,dv}{\cos v\,(1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2)}(\sin v - \sin U)$$

ch einmal differentiiren, und im Differential $v = V$,
$U = V$ setzen. Man erhält daher

$$\frac{ddm}{mdv^2} - \left(\frac{dm}{mdv}\right)^2$$
$$= \left(\cos v - \cos U.\frac{dU}{dv}\right)\frac{1-\varepsilon\varepsilon}{\cos v\,(1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2)}$$

§. 190.

Will man die in den vorigen Paragraphen über Darstellung des elliptischen Sphäroïds auf der el angestellten Berechnungen auf die Erde anwen-, indem man dieselbe als ein solches Sphäroïd be-chtet, so thut man am besten, wenn man alle Aus-cke in Reihen verwandelt, die nach den Potenzen s fortschreiten. Diese Reihen werden sehr schnell vergiren, da ε bei der Erde eine sehr kleine Grösse so dass man alle Potenzen von ε, welche die te übersteigen, ohne merklichen Fehler vernach-ren kann. Zu diesem Ende suche man die Ent-lung des Bruches

$$\frac{(1+\varepsilon \sin v)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} = \mu.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, erhält man

$$log(1+\varepsilon \sin v) - \frac{1+\varepsilon}{2} log(1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2) = log\,\mu.$$

$$log(1+\varepsilon \sin v) = \varepsilon \sin v - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin v^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^3 \sin v^3,$$

$$-\tfrac{\varepsilon}{2} log(1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2) = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon \sin v^2 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^3 \sin v^4$$

$$-\tfrac{1}{4}\varepsilon^4 \sin v^4,$$

hieraus ergiebt sich

$$log\,\mu = \varepsilon\varepsilon(\sin v + \tfrac{1}{2}\sin v^2) + \varepsilon^3(\tfrac{1}{3}\sin v^3 + \tfrac{1}{4}\sin v^4).$$

Nun ist aber vermittelst der bekannten Exponen-lausdrücke

$$\mu = 1 + log\,\mu + \tfrac{1}{2} log\,\mu^2$$

e wenn man hierin den Werth von $log\,\mu$ substituirt

$$\mu = 1 + \varepsilon\varepsilon(\sin v + \tfrac{1}{2}\sin v^2) + \varepsilon^3(\tfrac{1}{2}\sin v^2 + \tfrac{1}{3}\sin v^3 + \tfrac{1}{4}\sin v^4).$$

Hieraus findet sich leicht der Werth des andern den frühern Ausdrücken vorkommenden Bruches

$$\frac{(1-\varepsilon \sin v)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

r, wie man leicht sieht aus dem vorigen dadurch steht, dass man an die Stelle von $+\sin v$, $-\sin v$ zt, so dass seine Entwickelung durch

$$1 - ee(\sin v - \tfrac{1}{2}\sin v^2) + e^4(\tfrac{1}{2}\sin v^2 - \tfrac{1}{2}\sin v^3 + \tfrac{3}{8}\sin v^4)$$

dargestellt wird.

§. 191.

Man erhält daher, wenn statt $\cos(45 + \frac{1}{2}v)^2$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin v$ gesetzt wird

$$\frac{\cos(45+\frac{1}{2}v')^2\,(1+\varepsilon\sin v')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} =$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin v' + \tfrac{1}{2}ee(\sin v' - \tfrac{1}{2}\sin v'^2 - \tfrac{1}{2}\sin v'^3) + \tfrac{1}{8}e^4(\sin v'^2 + \tfrac{2}{3}\sin v'^3 - \tfrac{11}{12}\sin v'^4 - \tfrac{2}{3}\sin v'^5)$$

$$\frac{\cos(45+\frac{1}{2}v'')^2\,(1+\varepsilon\sin v'')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v'')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} =$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin v'' + \tfrac{1}{2}ee(\sin v' - \tfrac{1}{2}\sin v''^2 - \tfrac{1}{2}\sin v''^3) + \tfrac{1}{8}e^4(\sin v''^2 + \tfrac{2}{3}\sin v''^3 - \tfrac{11}{12}\sin v''^4 - \tfrac{2}{3}\sin v''^5)$$

Zieht man den letztern Ausdruck vom ersten ab, so erhält man den Zähler des Bruches welcher (§. 186.) ausdrückt, und wenn man zugleich vermittelst der identischen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin v''^2 - \sin v'^2 &= (\sin v'' - \sin v')(\sin v'' + \sin v')\\
\sin v''^3 - \sin v'^3 &= (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^2 + \sin v''\sin v' + \sin v'^2).\\
\sin v''^4 - \sin v'^4 &= (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^3 + \sin v''^2\sin v' + \sin v''\sin v'^2 + \sin v'^3)\\
\sin v''^5 - \sin v'^5 &= (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^4 + \sin v''^3\sin v' + \sin v''^2\sin v'^2 + \sin v''\sin v'^3 + \sin v'^4)
\end{aligned}$$

die gehörigen Reductionen anbringt, so kommt

$$\frac{\cos(45+\frac{1}{2}v')^2(1+\varepsilon\sin v')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v'^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} - \frac{\cos(45+\frac{1}{2}v'')^2(1+\varepsilon\sin v'')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v''^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sin v'' - \sin v') - \tfrac{1}{2}ee(\sin v'' - \sin v')[1 - \tfrac{1}{2}(\sin v'' + \sin v') - \tfrac{1}{2}(\sin v''^2 + \sin v''\sin v' + \sin v'^2)]$$

$$\sin v'' - \sin v') \left[\begin{array}{l}(\sin v'' + \sin v') \\ + \frac{2}{3}(\sin v''^2 + \sin v'' \sin v' \\ \quad + \sin v'^2) \\ - \frac{1}{12}(\sin v''^3 + \sin v''^2 \sin v' \\ \quad + \sin v'' \sin v'^2 + \sin v'^3) \\ - \frac{3}{4}(\sin v''^4 + \sin v''^2 \sin v' \\ \quad + \sin v''^2 \sin v'^2 + \sin v'' \\ \quad \sin v'^3 + \sin v'^4)\end{array}\right]$$

$$\sin v'' - \sin v')(1 - \varepsilon\varepsilon(1 - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}6) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha + \tfrac{2}{3}6 - \tfrac{11}{12}\gamma - \tfrac{3}{4}\delta))$$

an der Kürze wegen

$$+ \sin v' = \alpha$$
$$+ \sin v'' \sin v' + \sin v'^2 = 6$$
$$+ \sin v''^2 \sin v' + \sin v'' \sin v'^2 + \sin v'^3 = \gamma$$
$$+ \sin v''^3 \sin v' + \sin v''^2 \sin v'^2 + \sin v'' \sin v'^3$$
$$+ \sin v'^4 = \delta$$

Den Nenner des Bruches, welcher k angiebt, kann ohne weitere Rechnungen aus dem Zähler man $\sin v''$ und $\sin v'$ in dem vorigen Aus- negativ nimmt, und dem ganzen das entge- tzte Vorzeichen giebt; man muss daher statt ie entgegengesetzten $-\alpha$, $-\gamma$ nehmen, so dass

$$\frac{+\frac{1}{2}v'')^2(1-\varepsilon\sin v'')^\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{\sin(45+\frac{1}{2}v')^2(1-\varepsilon\sin v)^\varepsilon}{1+\varepsilon}$$
$$-\varepsilon\varepsilon\sin v'') \qquad (1-\varepsilon\varepsilon\sin v'^2)$$
$$\sin v'' - \sin v')(1 - \varepsilon\varepsilon(1 + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}6) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha - \tfrac{2}{3}6 - \tfrac{11}{12}\gamma + \tfrac{3}{4}\delta))$$

ch wird endlich

$$\sqrt{\frac{1 - \varepsilon\varepsilon(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}6) - \frac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha + \frac{2}{3}6 - \frac{11}{12}\gamma - \frac{3}{4}\delta)}{1 - \varepsilon\varepsilon(1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}6) + \frac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha - \frac{2}{3}6 - \frac{11}{12}\gamma + \frac{3}{4}\delta)}}.$$

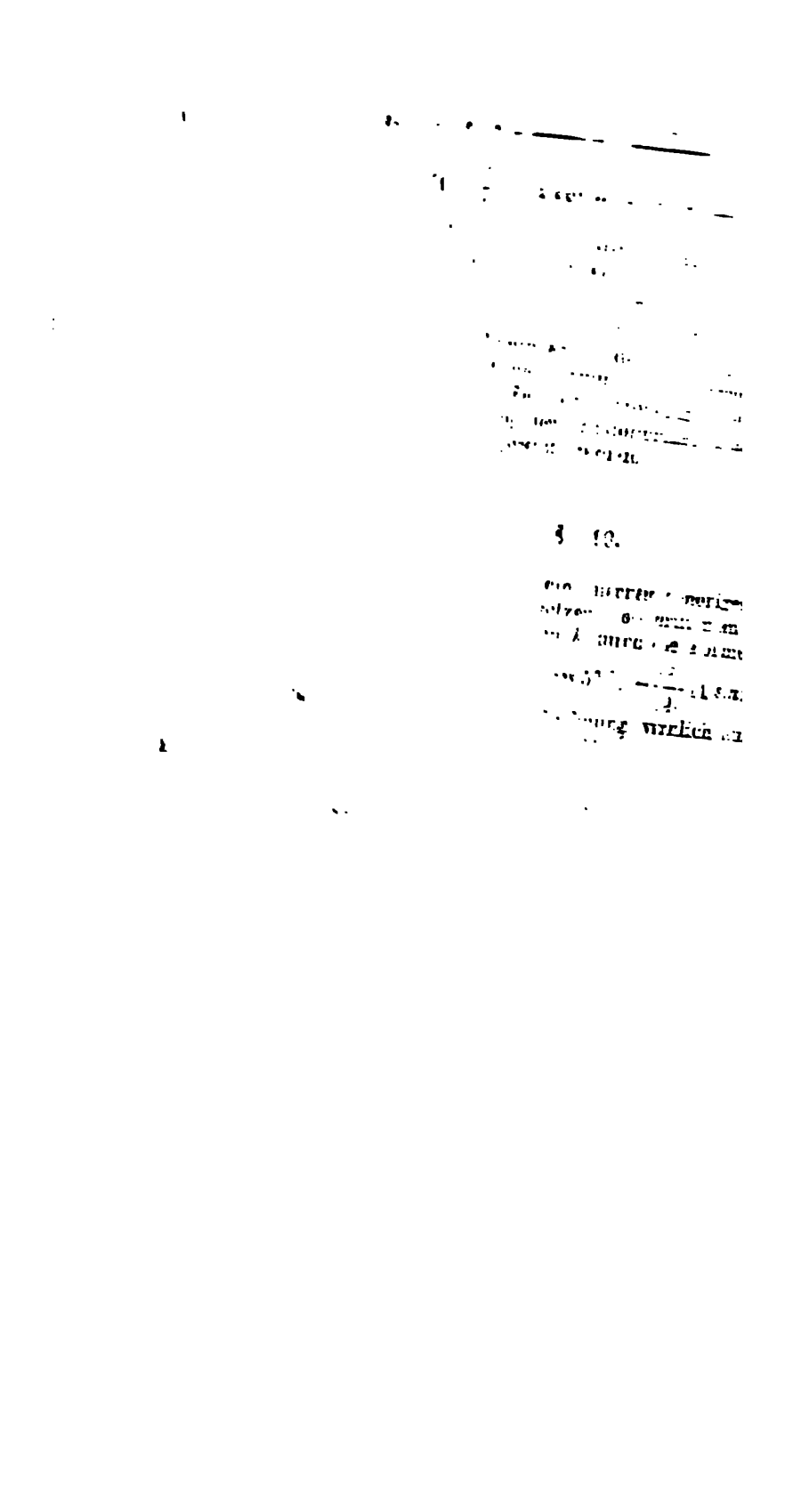
§. 192.

Vermittelst der Logarithmen lässt sich k noch hter berechnen; man findet nämlich nach den ge- igen Reductionen

$$2\log k = \alpha\varepsilon\varepsilon - (\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{11}{12}\gamma)\varepsilon^4.$$

r da, wie man leicht sieht $\gamma = \alpha(\sin v'^2 + \sin v''^2)$, wird auch

$$\log k = \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(\sin v'' + \sin v')\,[1 - \varepsilon\varepsilon(\tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{12}(\sin v'^2 + \sin v''^2)].$$



$$+\frac{\varepsilon\varepsilon}{24}(11\ \sin 20^\circ + 5)) = 0.0010597$$

$$\log \varepsilon\varepsilon = 7.8255235$$
$$\sin 50^\circ = 9.8842540$$
$$\cos 5^\circ = 9.9983442$$
$$7.7091814.$$

ist der briggsche Logarithmen des hyperbo-
ogarithmen von k. Addirt man hierzu den
men des Modulus des briggschen Systems
7843, so erhält man den briggschen Log. des
og. von k, $= 7.3469657$. Hiervon ist die
0222313, und wenn man diese wieder als
garithmen betrachtet und die entsprechende
sucht, so erhält man $k = 1{,}0051321$.

§. 194.

len Winkel V zu finden hat man die Formel

$$\sin V = \frac{k^{\frac{2}{\varepsilon}} - 1.}{k^{\frac{2}{\varepsilon}} + 1.} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

leichtern Berechnung wegen setze man $k^{\frac{2}{\varepsilon}} = \tang(45 + \theta)$, so wird

$$= \frac{\tang(45+\theta)}{\tang(45+\theta)} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\tang\theta}{\varepsilon}.$$

eichnet man durch ll den doppelt zu neh-
brigg. Logarithmen, so ist

$$\log(45 + \theta) = \log 2 - \log \varepsilon + ll.k$$
$$ll\,k = 7.3469657.$$
$$\log 2 = 0.3010300$$
$$\text{Compl. } \log \varepsilon = 1.0872383.$$
$$\log(45 + \theta) = 9.7352340$$
$$\log(45 + \theta) = 0.0543543$$
$$\theta = 3^\circ\ 34'\ 34''01.$$
$$\tang\theta = 8.7958531.$$
$$\log \varepsilon = 8.9127617.$$
$$\sin V \quad 9.8830914$$
$$V = 49^\circ\ 49'\ 4''.$$

§. 195.

Für den kleinsten Werth des Vergrösserungsverhältnisses m hat man die Gleichung (§. 189.)

$$m = \frac{A}{a}\sqrt{1 - ee\ \sin v^2}$$

und da der Winkel θ so bestimmt ist, dass $e \sin v = tang\,\theta$, so kann man diesen Werth auch so schreiben

$$m = \frac{A}{a} \cdot \frac{\sqrt{cos\,2\theta}}{cos\,\theta}.$$

Man hat nun

$cos\,2\theta$	= 9.9966075.
halbirt	= 9.9983037
$cos\,\theta$	= 9.9991535
	9.9991502

also $m = \frac{A}{a} \cdot 0{,}9980452.$

Nimmt man ferner um den Winkel U zu finden der dem Werthe $v = 45°$ entspricht, die Formel

$$log\,tang(45 + \tfrac{1}{2}U) = log\,tang(45 + \tfrac{1}{2}v) + log\,k - ee\,sin\,v\,(1 + \tfrac{1}{2}ee\,sin\,v^2)$$

so hat man im vorliegenden Falle

$sin\,v^2$	= 9.6989700
$log\,ee$	= 7.8255235
Compl. $log\,3$	= 9.5228788
	7.0473723
	0,0011152.
$log(1 + \frac{1}{2}ee\,sin\,v^2)$	= 0.0004840
$sin\,v$	= 9.8494850
$log\,ee$	= 7.8255235
log Modul.	= 9.6377843
	7.3132768
Zahl	= 0,0020572.

Die Multiplication mit dem Modulus musste deswegen geschehen, weil in der Formel natürliche Logarithmen vorausgesetzt sind, und die folgende Rechnung mit gewöhnlichen Logarithmen ausgeführt ist.

$$\begin{aligned} \log \tang(45 + \tfrac{1}{2} v) &= 0.3827757 \\ \log k \ldots\ldots &= 0.0022231 \\ -0{,}0020572 &= 9.9979428 \\ \hline & 0.3829416 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 + \tfrac{1}{2} U &= 67^\circ\ 30'\ 27''85 \\ U &= 45^\circ\ 0'\ 55''78. \end{aligned}$$

§. 196.

Endlich haben wir noch das Vergrösserungsverhältniss m an der Gränze der Darstellung, wo $v = 45^\circ$ ist, zu berechnen. Hierzu bedienen wir uns der Formel (§. 187.)

$$m = \frac{A}{a} \cdot \frac{\cos U}{\cos v} \cdot \sqrt{1 - ss \cdot \sin v^2}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \log(1 - ss \sin v^2) &= 9.9992726 \\ \cos U &= 9.8493677 \\ \text{Compl. } \cos v &= 0.1505150 \\ \hline & 9.9991553 \end{aligned}$$

also $m = \frac{A}{a}\, 0{,}9980569$. Vergleicht man dieses mit dem kleinsten Vergrösserungsverhältniss $\frac{A}{a}.\, 0{,}9980452$, so sieht man, dass der ganze Unterschied nur $\frac{1}{85303}$ beträgt.

§. 197.

Wir haben bisher immer uns blos der allgemeinen Auflösung $P + iQ = \varphi(p + iq)$ bedient; allein da die Gleichung $P + iQ = \varphi(p - iq)$ mit gleichem Rechte bei der Darstellungsmethode angewendet werden kann, so ist es nothwendig zu untersuchen, welchen Unterschied die Anwendung der letztern Formel hervorbringt. Man wird sehen, dass beide Auflösungen nur darin unterschieden sind, dass allemal bei der einen Auflösung die Theile in der Darstellung eine ähnliche Lage haben wie im Urbilde, bei der andern aber verkehrt liegen. Man kann nur dann einen Unterschied zwischen der gleichen und verkehr-

ten Lage der Theile machen, wenn man bei der Flächen zwei Seiten unterscheidet, eine obere und eine untere; denn stellt man nicht eine solche Bestimmung fest, so fällt der Unterschied beider Darstellungen weg, da man blos nöthig hat die Fläche umzudrehen, um die verkehrte Darstellung in die gleiche zu verwandeln. Wir müssen also zuerst ein Princip aufstellen, vermöge dessen man a priori entscheiden kann, welches die obere und welches die untere Seite der Oberfläche ist. Es sey f eine bestimmte Function der drei veränderlichen Grössen x, y, z, so kann man die Gleichung $f = 0$ als die Gleichung ansehen, welche die Natur einer Oberfläche bestimmt, indem x, y, z als die drei Coordinaten eines Punktes derselben angesehen werden, und der Werth von f wird im Allgemeinen auf der einen Seite der Oberfläche positiv, auf der andern negativ seyn, und wir wollen die erste Seite als die obere, die zweite als die untere betrachten. Dieselben Bestimmungen sollen auch für eine andere Oberfläche gelten, deren Gleichung durch $F = 0$ vorgestellt wird, wo F eine bestimmte Function der drei Coordinaten X, Y, Z ist. Die erste Oberfläche mag die darzustellende seyn, und auf der zweiten die Darstellung liegen.

§. 198.

Durch die Differentiation der zwei Grössen f und F, wird man die Gleichungen erhalten

$$df = edx + gdy + hdz$$
$$dF = EdX + GdY + HdZ.$$

wo e, g, h Functionen von x, y, z; E, G, H aber Functionen von X, Y, Z sind, und bekanntlich die partiellen Differentiale der Functionen f und F angeben.

Man kann nun, um die Darstellung der einen Fläche auf der andern zu finden, mehrere beliebige Zwischendarstellungen wählen, und wir wollen daher den Uebergang vom Urbilde auf der Fläche, deren Gleichung $f = 0$ ist, zu der letzten Darstellung auf der Fläche, deren Gleichung durch $F = 0$ dargestellt wird, durch sechs Zwischendarstellungen in

Ebenen machen, so dass wenn die Coordinaten eines Punktes des Urbildes durch x, y, z bezeichnet werden, die Coordinaten des correspondirenden Punktes in den Ebenen durch $x, y, 0$; $t, u, 0$; $p, q, 0$; $P, Q, 0$; $T, U, 0$; $X, Y, 0$; und die Coordinaten der Darstellung in der letzten Fläche durch X, Y, Z bestimmt werden. Wir haben daher folgendes Tableau der Coordinaten in den acht Darstellungen:

1) $x, y, z.$	5) $P, Q, 0.$
2) $x, y, 0.$	6) $T, U, 0.$
3) $t, u, 0.$	7) $X, Y, 0.$
4) $p, q, 0.$	8) $X, Y, Z.$

Bei den Darstellungen in der Ebene betrachten wir die Seite als die obere, auf welcher sich die positiven Coordinaten befinden, die einer auf derselben senkrechten Axe parallel sind.

§. 199.

Sieht man x und y als constant an, so wird $df = h dz$; für ein positives Increment dz wird df rücksichtlich seines Vorzeichens, vom Vorzeichen des Coefficienten h abhängen; ist dieser daher positiv, so wird man durch positive Incremente von z auf die obere Seite gelangen und die Darstellungen 1 und 2 ähnliche Lagen haben. Ist hingegen h negativ, so finden in beiden Darstellungen verkehrte Lagen statt. Dasselbe findet in der Verbindung der Darstellungen 7 und 8 rücksichtlich des Coefficienten H statt.

Es sey ferner die Länge eines unendlich kleinen Linearelements, dessen Endpunkte die Coordinaten x und y, $x + dx$ und $y + dy$ haben, $= ds$, der Winkel, den dasselbe mit der Abscissenlinie macht, $= l$, so ist $dx = ds. \cos l$, $dy = ds. \sin l$. Eben so sey die Länge eines Linearelements in der dritten Darstellung $d\sigma$, und der Winkel desselben mit der Abscissenlinie $= \lambda$, so wird $du = d\sigma. \sin\lambda$, $dt = ds. \cos\lambda$. Die beiden Winkel l und λ müssen immer so gerechnet werden, dass die positiv wachsende Abscissenlinie als feste Linie, in welcher der Winkel Null ist, betrachtet wird, und die Zählung nach der positiven Seite der Axe der Ordinaten y oder u zu wächst. Man hat nun

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy.$$

$$dt = \left(\frac{dt}{dx}\right) dx + \left(\frac{dt}{dy}\right) dy.$$

oder wenn man, statt du, dt, dx, dy ihre Werthe setzt

$$\sin\lambda . d\sigma = \left(\frac{du}{dx}\right) ds . \cos l + \left(\frac{du}{dy}\right) ds . \sin l.$$

$$\cos\lambda . d\sigma = \left(\frac{dt}{dx}\right) ds . \cos l + \left(\frac{dt}{dy}\right) ds . \sin l.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so kommt

$$tang\,\lambda = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right) \cos l + \left(\frac{du}{dy}\right) \sin l.}{\left(\frac{dt}{dx}\right) \cos l + \left(\frac{dt}{dy}\right) \sin l.}$$

Will man blos die Veränderungen betrachten, welche die Lage des einen Elements durch die Veränderung des andern erleidet, während man die Elemente immer als aus einem und demselben Punkte ausgehend ansieht, so muss man diese Gleichung differentiiren und die partiellen Differentialcoefficienten, die nicht von λ und l abhängen, als constant betrachten. Man erhält auf diese Art

$$\frac{d\lambda}{\cos\lambda^2} = \frac{\frac{dt}{dx} \cdot \frac{du}{dy} - \frac{du}{dx} \cdot \frac{dt}{dy}}{\left(\frac{dt}{dx} . \cos l + \frac{dt}{dy} . \sin l\right)^2} . dl.$$

Man sieht hieraus sogleich, dass das Verhältniss $\frac{d\lambda}{dl}$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Zähler des Bruches $\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)$ einen positiven oder negativen Werth erhält, also geschehen im ersten Falle die Aenderungen der Lage der Elemente in demselben Sinne, im zweiten Falle im entgegengesetzten, so dass im ersten die Darstellungen

2 und 3 ähnlich liegend, im zweiten aber verkehrt sind.

§. 200.

Eben so wird die Darstellung 6 der siebenten ähnlich liegend oder verkehrt liegend seyn, je nachdem $\left(\frac{dT}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dU}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dT}{dY}\right)$ positiv oder negativ ist.

Folglich werden die Darstellungen in 1 und 3, oder in 8 und 6 gleiche oder verkehrte Lagen haben, je nachdem die Quotienten

$$\frac{\left(\frac{dt}{dx}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dy}\right)}{h},$$

$$\frac{\left(\frac{dT}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dU}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dT}{dY}\right)}{H}$$

positive oder negative Werthe haben.

§. 201.

Auf gleiche Weise erhält man den Uebergang der dritten Darstellung zur vierten, und der sechsten zur fünften, indem man nur in der Formel

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dy}\right)$$

statt t, u, x, y resp. p, q, t, u setzt, und in dem andern Ausdruck

$$\left(\frac{dT}{dX}\right)\left(\frac{dU}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\left(\frac{dT}{dY}\right)$$

für T, U, X, Y resp. P, Q, T, U setzt, so dass die positiven oder negativen Werthe der durch diese Substitution entstehenden Formeln

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dq}{du}\right) - \left(\frac{dq}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dp}{du}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dQ}{dU}\right) - \left(\frac{dQ}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dP}{dU}\right)$$

$$1 - \varepsilon\varepsilon(\sin v - \tfrac{1}{2}\sin v^2) + \varepsilon^4(\tfrac{1}{8}\sin v^2 - \tfrac{1}{6}\sin v^3 + \tfrac{3}{8}\sin v^4)$$

dargestellt wird.

§. 191.

Man erhält daher, wenn statt $\cos(45 + \frac{1}{2}v)^2 - \frac{1}{2}\sin v$ gesetzt wird

$$\frac{\cos(45+\frac{1}{2}v')^2\,(1+\varepsilon\sin v')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2)} =$$

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\sin v' + \tfrac{1}{8}\varepsilon\varepsilon(\sin v' - \tfrac{1}{2}\sin v'^2 - \tfrac{1}{2}\sin v'^3) + \tfrac{1}{64}\varepsilon^4(\sin v'^2 + \tfrac{2}{3}\sin v'^3 - \tfrac{1}{12}\sin v'^4 - \tfrac{2}{3}\sin v'^5)$$

$$\frac{\cos(45+\frac{1}{2}v'')^2\,(1+\varepsilon\sin v'')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v'')} =$$

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\sin v'' + \tfrac{1}{8}\varepsilon\varepsilon(\sin v'' - \tfrac{1}{2}\sin v''^2 - \tfrac{1}{2}\sin v''^3) + \tfrac{1}{64}\varepsilon^4(\sin v''^2 + \tfrac{2}{3}\sin v''^3 - \tfrac{1}{12}\sin v''^4 - \tfrac{2}{3}\sin v''^5).$$

Zieht man den letztern Ausdruck vom ersten ab, so erhält man den Zähler des Bruches welcher k (§. 186.) ausdrückt, und wenn man zugleich vermittelst der identischen Gleichungen

$$\sin v''^2 - \sin v'^2 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v'' + \sin v')$$

$$\sin v''^3 - \sin v'^3 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^2 + \sin v''\sin v' + \sin v'^2).$$

$$\sin v''^4 - \sin v'^4 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^3 + \sin v''^2\sin v' + \sin v''\sin v'^2 + \sin v'^3)$$

$$\sin v''^5 - \sin v'^5 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^4 + \sin v''^3\sin v' + \sin v''^2\sin v'^2 + \sin v''\sin v'^3 + \sin v'^4)$$

die gehörigen Reductionen anbringt, so kommt

$$\frac{\cos(45+\frac{1}{2}v')^2(1+\varepsilon\sin v')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v'^2)} - \frac{\cos(45+\frac{1}{2}v'')^2(1+\varepsilon\sin v'')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v''^2)}$$

$$= \tfrac{1}{4}(\sin v'' - \sin v') - \tfrac{1}{8}\varepsilon\varepsilon(\sin v'' - \sin v')[1 - \tfrac{1}{2}(\sin v'' + \sin v') - \tfrac{1}{8}(\sin v''^2 + \sin v''\sin v' + \sin v'^2)]$$

t, bei beliebiger Veränderung der
ıte, γ einen constanten Werth er-
$g = dG$, d. h. die Verrückung
ente geschieht in beiden Darstel-
Sinn, so dass sie ähnlich liegend

§. 203.

hingegen den zweiten Fall, in
rden muss
$-iq)$, $P - iQ = \varphi(p + iq)$.
h Differentiation und Substitution
$(p - iq)$, $\varphi'(p + iq)$ aus vori-
Gleichungen
$= (\pi - i\lambda)\,(dp - idq)$
$= (\pi + i\lambda)\,(dp + idq)$.
, $dQ = -\lambda dp - \pi dq$

$= \sigma.\, ds.\, cos(g + \gamma)$
$= -\sigma.\, ds\, sin(g + \gamma)$
ds, $G = -(g + \gamma)$. Da also
$= -dg$, so wird die eine Dar-
ndere eine verkehrte Lage haben.

§. 204.

leuchtend, dass die Anzahl der
ngen, in den acht genommenen,
rstellung der Fläche $f = 0$, auf
eine ähnlich oder verkehrt lie-
ılich die Anzahl der verkehrten
, so ist die letzte ähnlich liegend;
le, so ist sie verkehrt liegend.
den vier Grössen

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dy}\right)}{h},$$

$$\frac{\left(\frac{dU}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dT}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dT}{dY}\right)}{H}$$

obei das Resultat freilich immer durch die bei der irklichen Ausführung der Messung unvermeidlichen ehler, einer Ungewissheit unterworfen war, die bei n ältern Messungen oft sehr bedeutend ausfiel, da ie angewendeten Instrumente und Methoden im Al- gemeinen sehr mangelhaft waren.

§. 206.

Schon in den frühesten Zeiten sind zu diesem wecke Messungen angestellt worden, von denen wir hauptsächlichsten hier anführen wollen. Erato- enes, der 276 v. C. G. geboren wurde, suchte der Entfernung der beiden Oerter, Syene und lexandrien, die Grösse der Erde zu bestimmen, dem er annahm, dass beide auf demselben Erdme- idian liegen. Er wusste, dass zur Zeit des Sonnen- illstandes, die Sonne des Mittags in Syene auf den und eines tiefen Brunnens schien, woraus zu schlies- n war, dass zu dieser Zeit die Sonne sich im Ze- h des Ortes befand. In Alexandrien fand er zu erselben Zeit den Abstand der Sonne vom Zenith ich dem funfzehnten Theile der ganzen Peripherie s Kreises, also gleich 7° 12′, so dass der Unter- hied der Polhöhen beider Oerter den besagten Win- l gleich kam. Aus den Berichten der Reisenden fuhr Eratosthenes ferer, dass die Entfernung beider rter von einander 5000 Stadien betrug, also ergab ch hieraus der Umfang der Erde zu 50 mal 5000 der 250000 Stadien, und die Grösse eines Grades lbst zu 694 Stadien; Eratosthenes gab daher um e Länge eines Grades genau gleich 700 Stadien zu halten, den Umfang der Erde zu 252000 Stadien an.

§. 207.

Man sieht aus dem ganzen Verfahren, wie höchst genau diese Methode, die Grösse der Erde zu be- mmen, ist, da nirgends eine wirkliche Messung, ser bei der Auffindung des Abstandes der Sonne m Zenith zu Alexandrien geschehen ist, und dieser lbst ist nicht viel zu trauen, da die Messung durch n Schatten eines Stifts bewerkstelligt wurde, und

eraus $x = 4686$ Stadien, so dass also der Um-
er Erde nur 50.4686 oder 234300 Stadien be-
würde. Dividirt man dieses Resultat durch
so findet man die Länge eines Grades des Me-
= 650,82 Stadien. Um dies auf die jetzt ge-
lichen Maasse zu reduciren, nehme man die
der Stadie zu 95 Toisen an, so erhält man
Toisen für einen Grad, welches mit unsern
Messungen verglichen, um mehr als 3800 T.
s ist. Dieser Unterschied rührt theils daher,
ir die Grösse der Stadien, deren es selbst ver-
ne Arten gab, in Vergleichung mit den jetzt
hlichen Längenmaassen nicht kennen, theils
e Länge von 5000 Stadien wegen den unver-
hen Krümmungen des Weges selbst zu gross
man wohl nicht annehmen kann, dass die
en genau einen grössten Kreis bei der Zurück-
des Weges beobachtet haben.

§. 208.

ngefähr zweihundert Jahr nach Eratosthenes
Possidonius eine neue Messung über die
der Erde an, indem er in Rhodus und Ale-
ien den Stern erster Grösse Canopus im
lde des Schiffes Argo, rücksichtlich seiner
ber dem Horizont beobachtete; in Rhodus war
Fixstern genau im Horizont sichtbar, wenn er
Meridian dieses Ortes befand, in Alexandrien
n war derselbe bei seiner Culmination um
sten Theil der Peripherie des Kreises über
rizont erhoben, d. h. seine mittägliche Höhe
° 30′. Hieraus folgte, dass Alexandrien um $7\frac{1}{2}$°
r lag als Rhodus; die Entfernung beider Oer-
te Possidonius gleich 5000 Stadien, und nahm
an, dass sie einen gemeinschaftlichen Meri-
itten. Aus diesen Angaben findet man leicht
ge eines Grades zu $666\frac{2}{3}$ Stadien.

§. 174.

ese Messung ist aber wohl noch ungenauer als
Eratosthenes; denn erstens weiss man jetzt

ngung die Auslieferung der Werke der grie-
ı Philosophen und Aerzte gemacht hatte, liess
nge Mathematiker zusammen kommen, welche
sse eines Grades bestimmen sollten; sie theil-
ı in zwei Abtheilungen, von denen die eine
ıem bestimmten Punkte aus in der Wüste
am arabischen Meerbusen, in nördlicher Rich-
lie andere von demselben Punkte aus in südli-
lichtung einen Grad des Meridians maassen.
e Parthei fand 56, die andere 56⅔ arabische
für die Länge eines Grades, und bei einer
Maimon's Befehl angestellten Wiederholung
ıeit ergab sich dasselbe Resultat. Alfraga-
ıbt der arabischen Meile 4000 Ellen zu 24
ınd der damalige Zoll machte den Raum aus,
ıs an einander gelegte Gerstenkörner einnah-
ler Holländer Snellius fand, dass im Mittel
stenkörner einen rheinländischen Fuss aus-
ı, und man erhält hierdurch die Länge der
ıen Meile in rheinländischen Fuss ausgedrückt
$\frac{.24.6}{9} = 6472$. Nimmt man nun den rheinl.
0,16103 Toisen und die Länge des gemessenen
im Mittel zu 56⅔ Meile, so erhält man in
die Länge des Grades = 58710 Toisen, we-
1700 Toisen zu gross.

§. 211.

se arabische Messung ist bis zum Anfange des
nten Jahrhunderts die einzige welche wir
da die Wissenschaften nur kurze Zeit hin-
ei den Arabern blühten, und die europäischen
vorzüglich in den Naturwissenschaften, in
ste Unwissenheit versunken waren, so dass
ie Lehre von der runden Gestalt der Erde
ı ging. Ein Franzose Fernel, war in den
Zeiten der erste, welcher wieder eine Mes-
er die Grösse der Erde unternahm. Er suchte
höhe von Paris, und ging darauf auf dem
ıach Amiens nordwärts fort, bis er an eine
am, die einen Grad von der Pariser Polhöhe

messer der Erde geben, da die
Berges ausgehenden Lichtstrah-
unregelmässig gebrochen werden,
der Entfernung, in welcher der
viel zu unsicher wird.

§. 212.

Leyden gebrauchte im Jahre 1615
den Bogen eines Meridians durch
und vermittelst einer genau ge-
ne trigonometrisch zu bestimmen.
n Leyden und Souterwoude auf den
, deren Länge 316 rheinländische
uss betrug, und gelangte nach und
ammenhängende Dreiecke zu einem
dians zwischen Alkmaar und Bergen-
ssen Endpunkte er die geographischen
.mte, deren Unterschied er zu 1° 11′ 30″
oss daraus die Grösse eines Grades der
and zu 28500 rheinländischen Ruthen,
nan die zwölffüssige rheinländische Ru-
6 Toisen, so erhält man für die Länge
5072 Toisen. Snellius selbst giebt 55021
Er fand aber bald nachher, dass er so-
Messungen als den Berechnungen Fehler
te, und maass daher im Januar des Jah-
f dem Eise in den Umgegenden von Ley-
ue Standlinie, indem er zugleich die Tri-
wiederholte; allein es scheint nicht als
zweiten Messungen zu einer neuen Be-
er Länge eines Grades, wirklich der Be-
nterworfen habe, da zu seiner Zeit die
he Berechnungsart noch nicht bekannt
r sich daher genöthigt sah, alle Multipli-
l Divisionen der grossen Zahlen, die die
ischen Proportionen erfordern, wirklich
, wovon er durch die Langwierigkeit der
, und die dadurch leicht zu begehenden
hler, das zweite Mal abgeschreckt wurde.
broek ein Nachfolger und Verwandter
, bewerkstelligte im Jahre 1729 die Rech-
lem Manuscript des Snellius, nachdem

äche der Flüssigkeit, vermöge der aus ih-
hung entstehenden Schwungkraft, ein ellip-
äroïd bilden, dessen kleine Axe den Durch-
ırch die Pole der Erde, und dessen grosse
Durchmesser des Aequators bildet. Huy-
l das Verhältniss der beiden Durchmesser
578, Newton wie 229:230, wo das letztere
ge durch die Theorie gegebene Verhältniss
. Huygens die Auflösung der Aufgabe über
ımung der Oberfläche der Flüssigkeit nicht
genug genommen hatte. Wie dem nun
so ergab sich doch aus beiden Theorien
ıttung der Erde an den Polen, und hieraus
ss die Grösse eines Grades immer wachsen
näher man den Polen kommt. Diese lässt
t folgendermassen zeigen. Wir hatten in
ıs Linearelement der Oberfläche des Ellip-
sen grosse Axe durch a, und halbe kleine
ı b bezeichnet wird

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\cos u^2\, dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2)\, du^2}$$

wo t die geographische Länge eines Punk-
er Oberfläche, und u einen blos von der
ichen Breite abhängenden Winkel bedeutet.
ı nun auf einem und demselben Meridian,
geographische Länge aller auf dieser Linie
Punkte constant, also $dt = 0$, und es wird
enn ds die Länge eines Elements des Meri-
ichnet

$$= du \sqrt{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}.$$

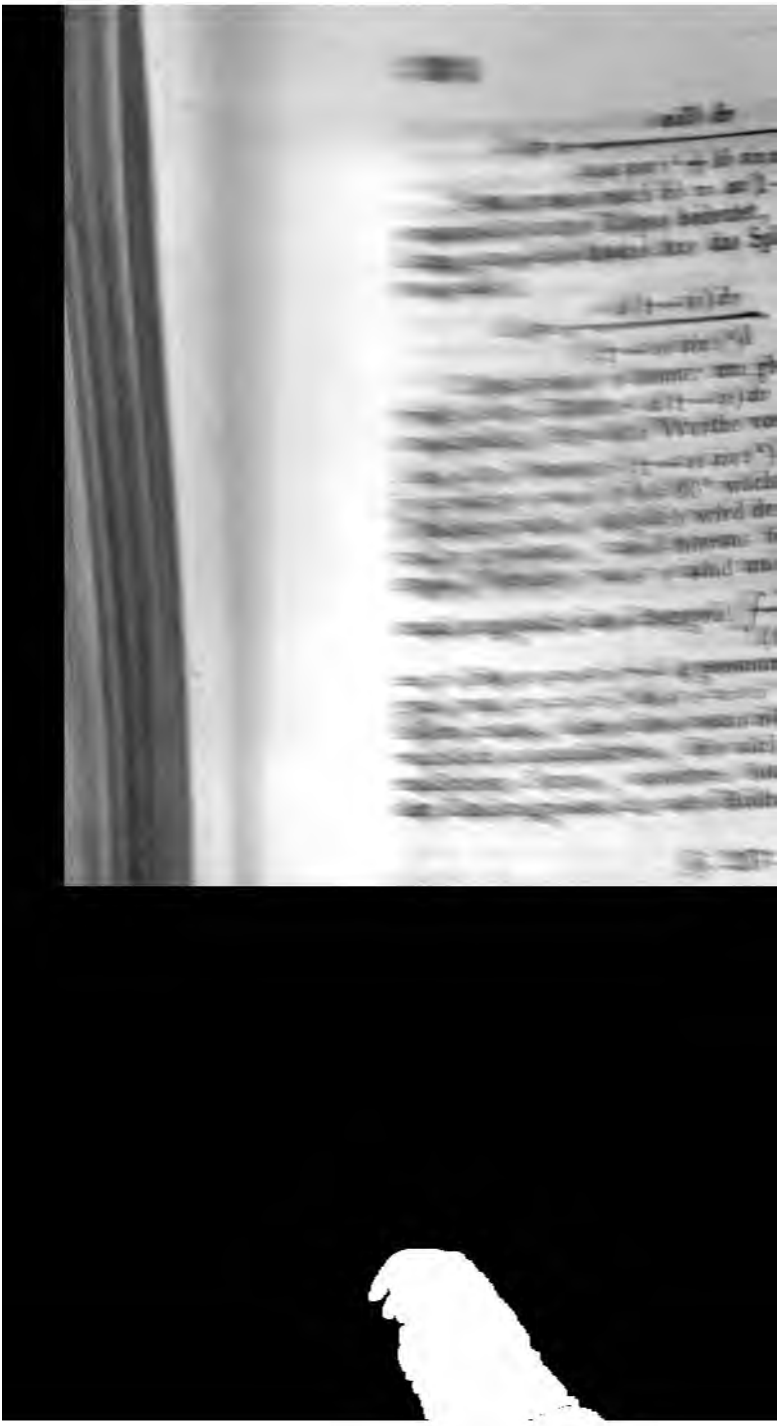
rner §. 179. $a \operatorname{tang} u = b \operatorname{tang} v$ gesetzt
ro wie §. 182. bewiesen ist, v die geogra-
eite oder Polhöhe bedeutet, so hat man

$$du = \frac{ab\, dv}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

$$s u^2 = \frac{aa \cos v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

$$n u^2 = \frac{bb \sin v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

renn man diese Werthe in obigen Ausdruck
ostituirt



dersprechlich anzunehmen, da ausserdem die
en Messungen so ausdrücklich dagegen spra-
ine Beobachtung, welche sehr für die New-
Angaben zeugte, hatte schon im Jahre 1672
auf der Insel Cayenne, die fünf Grade
uator entfernt liegt, gemacht. Dieser war
ser Gegend geschickt worden, um theils über
nomische Strahlenbrechung, theils über ei-
uptpunkte der Bewegung der Sonne, Beob-
n anzustellen; und fand dass das Pendel an
, die er von Paris mitgenommen hatte, seine
ungen in längerer Zeit in Cayenne als in
llbrachte, so dass er genöthigt war, um das
pendel zu erhalten, dasselbe um 1¼ Linie
ürzen. Man schrieb diese Erscheinung an-
r grössern Hitze in den tropischen Gegenden
rch welche die Pendelstange verlängert wor-
e, allein die über die Ausdehnung der Me-
grosser Hitze angestellten Versuche zeigten,
grössere Wärme allein, die ausserdem nicht
der in Paris verschieden war, diese Ver-
nicht hervorbringen konnte, indem die
en geringen Wärmeunterschied entstehende
rung der Pendelstange, als fast unmerklich
wurde. Schon vorher hatte Halley dieselbe
ung auf der Insel Helena bemerkt, allein die
ung des Pendels, welche nothwendig war
Uhr den richtigen Gang zu geben, nicht wei-
achtet. Es blieb also nichts weiter übrig,
wirkliche Verminderung der Schwerkraft,
en langsamern Fall der Körper in den Ge-
les Aequators anzunehmen, welche theils aus
hwellung der Erde in dieser Gegend, theils
grössern Schwungkraft der Körper entstehen

§. 218.

über diesen Gegenstand entstandene Streit
ange Zeit mit grossen Eifer zwischen den
rn des Newton und Huygens, und ihren
den Anhängern des Cassini geführt, bis man
einsah, dass die geringe Ausdehnung des

$$= \frac{a(1-\varepsilon\varepsilon)\,dv.}{(1-\varepsilon\varepsilon\,\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wird, so erhält man

$$= \frac{a(1-2\alpha)\,dv.}{(1-2\alpha\,\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ckelt man das Radical in eine Reihe, so

$$= a(1-2\alpha)\,dv\,(1+3\alpha\,\sin v^2)$$
$$= a\,dv\,(1-2\alpha+3\alpha\,\sin v^2) \text{ und da}$$
$$= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2v, \text{ so wird auch}$$
$$= \alpha dv\,[1-\tfrac{3}{2}\alpha\,(1+3\cos 2v)].$$

ieser Gleichung erhält man durch die Inte-
genden Werth:

$$\text{ist. } + av(1-\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{3}{4}a\,\alpha\,\sin 2v.$$

ie Constante zu bestimmen, fange der ge-
ogen in der Stelle an, wo $v = v'$ ist, so
ir diesen Werth $s = 0$, also

$$\text{ust. } + av'(1-\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{3}{4}a\alpha\,\sin 2v'.$$

man diese Gleichung von der obern abzieht,

$$(1-\tfrac{1}{2}\alpha)(v-v') - \tfrac{3}{2}a\alpha\,\sin(v-v')\cos(v+v').$$

man die Länge des ganzen gemessenen
und bezeichnet die geographische Breite
chsten Endpunktes desselben durch v'', so
ie Gleichung

$$a(1-\tfrac{1}{2}\alpha)(v''-v')$$
$$-\tfrac{3}{2}a\alpha\,(\sin(v''-v)\cos(v''+v')).$$

ıer andern Stelle der Erde habe man zwi-
Polhöhen v''', v^{IV}, die Länge des Bogens
ıden, so wird ebenfalls

$$a(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\,v^{IV}-v'')$$
$$-\tfrac{3}{2}a\alpha.\,\sin(v^{IV}-v''')\,\cos(v^{IV}+v''').$$

un die Unterschiede $v''-v'$, $v^{IV}-v'''$ ein-
h, und wie aus den Messungen folgt, je-
einem Grad, so erhält man, indem dieser
$l = \delta$ gesetzt und die zweite Gleichung
erste dividirt wird

$$\frac{(1-\tfrac{1}{2}\alpha)-\tfrac{3}{2}\alpha.\,\frac{\sin\delta}{\delta}.\,\cos(v^{IV}+v''')}{(1-\tfrac{1}{2}\alpha)-\tfrac{3}{2}\alpha.\,\frac{\sin\delta}{\delta}.\,\cos(v''+v')}.$$

$g \sin 66° 20' = 9.9236926.$
$\log 3 = 0.4771212.$
Compl. $\log \mu = 1.9189409$

$$\log \frac{1}{\alpha} = 2\,3197547$$

$= \frac{1}{209}$, welches die gesuchte Abplattung ist.

erbindet man die französische Messung zu mit der peruanischen, so wird in diesem Falle
$= 57060$ Toisen; $s' = 56753$ Toisen
$= 49° 54'$, $v' = 0° 0'$
$= 0{,}0054095$, $\alpha = \frac{1}{324}$.

der Verbindung der lappländischen Messung
1 Grad von Amiens ergiebt sich $\alpha = \frac{1}{115}$,
1 sieht aus diesen drei Werthen der Abplat-
· Erde, wie unsicher die Messungen in dieser
it sind. Die lappländische vorzüglich ist all-
als unrichtig anerkannt worden, und von
reien mag allein die peruanische als zur Ver-
g zulässig betrachtet werden, da dieselbe mit
Fleiss ausgeführt ist.

§. 221.

Gradmessung in Peru ist unter den bis jetzt
nen die erste, welche mit der gehörigen Ge-
t ausgeführt wurde, und bei welcher man
hwendigen Vorsichtsmaassregeln anwendete,
bei den Operationen die die terrestrische
betrafen, als auch bei denjenigen, welche
astronomischen Bestimmungen Bezug hatten.
g bald darauf an auch in andern Ländern
en anzustellen, um durch die Menge der
ungen, die Gestalt der Erde so genau als
auszumitteln, allein nicht alle seitdem be-
ligten Messungen, sind von gleichem Werthe.
aille ging im Jahre 1750 nach dem Vor-
ler guten Hoffnung, eigentlich in der Absicht,
ungen über die noch wenig bekannten Sterne

s die Bestimmungen der Polhöhen von den
ıptpunkten bekannt geworden, nämlich
ıe von Dorpat 58° 22′ 47″38
— Jacobstadt 56. 30. 4. 94
— Hochland 60. 5. 10. 05

§. 223.

st aus §. 219 und §. 220. einleuchtend, dass
admessungen die Gestalt der Erde völlig be-
, allein man wird aus jedem Paar von Mes-
mmer einen andern Werth für die Abplat-
Erde sowohl, als für den Durchmesser des
's finden, wie sich schon aus dem §. 220. ge-
Beispiel zeigt. Zum Theil liegt die Abwei-
er verschiedenen Resultate in einem Fehler,
, auch die vorzüglichsten Messungen unter-
ind, und welcher vorzüglich die astronomi-
obachtungen betrifft, indem bei den meisten
ungen der Polhöhen der Endpunkte oder der
ıpunkte der gemessenen Bogen, ein Fehler
r und mehr Secunden vorfallen kann. Der
ılichste Grund dieser Abweichungen ist aber
ganz andern Ursache zu suchen, die man
wegschaffen kann, wenn auch jede astrono-
eobachtung an sich absolut genau wäre. Be-
wir nämlich den Meridian als eine Ellipse,
die Amplitude des gemessenen Bogens
n Winkel bestimmt, den die beiden an den
ten dieses Bogens gezogenen Normalen mit
bilden, und dieser Winkel ist dem Unter-
lerjenigen zwei Winkel gleich, welchen die
ı mit der Aequatorsebene machen. Man
ın an, dass die Lage des Pendels an jedem
lich die Normale angiebt, und da der Win-
ı das Pendel mit der Aequatorsebene bildet,
öhe des Ortes ausmacht, so wird der Unter-
er Polhöhen an beiden Endpunkten des ge-
: Meridianbogens als die Amplitude dessel-
sehen.
Lage des Pendels selbst, wird durch die An-
aller einzelnen Theile der Erde auf dasselbe
, und sie würde wirklich mit der der Nor-

§. 224.

n muss sich also bei der Untersuchung über
stalt und Grösse der Erde damit begnügen,
ıles elliptisches Sphäroïd aufzusuchen, welches
ı vorzüglichsten Messungen so genau als mög-
schliesst, und da man aus dem Vorigen sieht,
r Hauptgrund der verschiedenen, sich aus den
gen ergebenden Gestalten der Erde, in dem
mischen Theile derselben liegt, und man die
schen Messungen als völlig genau, wenigstens
gleich mit den astronomischen, ansehen kann,
man dieses Ellipsoïd so suchen müssen, dass
nessenen Bogen der Meridiane genau darge-
erden, und seine Dimensionen den aus den
ın abgeleiteten wahrscheinlichsten Werth er-

albeck hat schon diese Aufgabe behandelt,
Dissertation de forma et magnitudine
is, ex dimensis arcubus meridiani de-
dis, indem er das Princip zum Grunde legte,
ɜ Abplattung und der 360. Theil des Erdmeri-
) zu bestimmen wären, dass die Summe der
te der Untersehiede zwischen den gemessenen
rechneten Amplituden ein Minimum sey.
hat er aber blos die Endpunkte der ganzen
gen in Betracht gezogen, theils auch sich auf
ɛe Potenz der Abplattung beschränkt. Er fand
diese Methode die wahrscheinlichsten Werthe
en 360 Theil des Erdmeridians 57009,758 Toisen

$$\text{für die Abplattung } \frac{1}{302{,}78.}$$

f Veranlassung des Herrn Hofrath Gaufs ha-
die Berechnung ausführlicher wiederholt, in
r die Dimensionen des Erdsphäroïds so gefun-
rden, dass die Summe der Quadrate der Un-
ɛde zwischen den berechneten und beobachte-
lhöhen ein Minimum ist. Ausserdem habe
Quadrat der Abplattung noch mit in Betracht
n, und die hannoversche Gradmessung, die bei
ck fehlt, mit hinzugenommen.

$$\frac{s}{a} = \delta(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha \sin\delta . \cos(2v' + \delta)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2} \sin 2\delta \cos(4v' + 2\delta) . \alpha\alpha$$

oder wenn man a aus dieser Gleichung vermittelst der obern eliminirt

$$\frac{s\pi}{180f} = \delta - \tfrac{1}{2}\alpha(1 + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin\delta . \cos(2v' + \delta)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2} \sin 2\delta \cos(4v' + 2\delta) . \alpha\alpha$$

Man hat nun bekanntlich

$$\sin\delta = \delta - \tfrac{1}{6}\delta^3 + \tfrac{1}{120}\delta^5 - \ldots .$$
$$\cos\delta = 1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{24}\delta^4 - \ldots .$$

also sehr nahe $\sin\delta = \delta\sqrt[3]{\cos\delta}$, $\sin 2\delta = 2\delta\sqrt[3]{\cos 2\delta}$, und hierdurch entsteht die Gleichung, indem man noch die Summe der beiden Polhöhen $v' + v' + \delta = p$ setzt,

$$\frac{s\pi}{180f} = \delta\left[1 - \tfrac{1}{2}\alpha(1 + \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt[3]{\cos\delta . \cos p} + \tfrac{1}{1}\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\cos 2\delta . \cos 2p} . \alpha\alpha\right].$$

§. 226.

Es ergiebt sich hieraus, indem man mit dem Coefficienten von δ dividirt und der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt[3]{\cos\delta . \cos p} = A$$
$$\tfrac{1}{1}\tfrac{5}{6}\sqrt[3]{\cos 2\delta . \cos 2p} = B \quad \text{setzt}$$
$$\delta = \frac{s\pi}{180f} . [1 + A\alpha - (B - AA)\alpha\alpha]$$

und man findet durch diese Formel δ in Theilen des Halbmessers, den Halbmesser als Einheit angenommen. Will man δ in Secunden haben, so muss man den hinter dem Gleichheitszeichen befindlichen Theil mit $\frac{180.3600}{\pi}$ multipliciren; dann wird

$$\delta = \frac{3600\,s}{f}(1 + A\alpha - (B - AA)\alpha\alpha).$$

Nun seyen f' und α' die schon bekannten genäherten Werthe von f und α, x und y seyen die Correctionen von f' und α', so dass

12″63 = 44532″63, die Summe der
89° 42′ 4″85, die Grösse $s = 705189{,}4$.

$\cos\delta = 9.9897983.$

$\cos\delta = 9.9965994.$
$\cos p = 7.7169814$
$\frac{1}{2}\alpha') = 7.6951406$

$5.4087214 = \log \alpha' A.$

$= + 0{,}0000256$
$= + 0{,}0000000$
$= 8.9581883$

$= 9.9860628.$
$= 9.9999762\, n$
$= 5.0097169$

$4.9957559\, n = \log \alpha'\alpha' B.$
$= - 0{,}0000099.$
$- \alpha'\alpha' B + (\alpha' A)^2 = 1{,}0000355.$
$= 0.0000154$

$= 8.8003533$

$= 5.8483058$

$4.6486745 = \log \delta'.$
$= 44532''23$
$'\alpha' B + (\alpha' A)^2 = 0{,}0000455.$
$= 5.6570559.$
$= 5.6586755.$

$0.3057404 = 2{,}021766 =$ Coeff. von y.

r

$532''23 + 44532\,\alpha + 2{,}02\,y.$

erechnung der Grössen A', B, so wie
en von y, ist der Gebrauch von Lo-
fünf Decimalstellen immer hinreichend.
übrigens aus der gefundenen Gleichung,
ctionen x und y äusserst klein ausfal-
der beobachtete Werth von $\delta = 44532''63$
dem aus den angenommenen Werthen
heils des Erdmeridians und der Abplat-
ten abweicht. Hätte man nun noch
, so könnte man x und y so bestim-

men, dass den beiden Messungen, aus welchen zwei Gleichungen abgeleitet sind, vollkommen Genü geleistet würde.

Wir wollen als zweites Beispiel die grösse estindische Messung vornehmen. Hierbei hat m folgende Beobachtungen:

Polhöhe von Punnae $= +\ 8^{\circ}\ 9'\ 38''39.$
— — Namthabad $= +\ 15^{\circ}\ 6'\ 0''64.$
Abstand der Parallelkreise $s = 393810{,}72$ Toisen
folglich $\delta = 6^{\circ}\ 56'\ 22''25 = 24982''25$
$p = 23^{\circ}\ 15'\ 39''03$
$\cos\delta = 9.99682$

$\sqrt[3]{\cos\delta} = 9.99894$
$\cos p = 9.96318$
$\log[\alpha'(1+\frac{1}{3}\alpha')] = 7.69514.$

$7.65726 = \log \alpha' A'.$
$\alpha' A' = 0{,}0045422$
$(\alpha' A')^2 = 0{,}0000206$
$\cos 2\delta = 9.98713$

$\sqrt[3]{\cos 2\delta} = 9.99571$
$\cos 2p = 9.83763$
$\log \frac{1}{12}\alpha'\alpha' = 5.00972$

$4.84306 = \log \alpha'\alpha' B.$
$\alpha'\alpha' B = 0{,}0000070.$
$1 + \alpha' A' + (\alpha' A')^2 - \alpha'\alpha' B = 1{,}0045558.$
$\log = 0.0019740$
$\log \frac{3600}{f''} = 8{,}8003533$
$\log s = 5.5952875.$

$4.3976148 = \log \delta'$
$\delta' = 24981''30$
$\alpha' A + (\alpha' A)^2 - 2\alpha'\alpha' B = 0{,}0045488$
$\log = 7.65790$
$\log \delta' = 4.49761$

$2.05551 = 113{,}635 =$ Coeff. von y.

Man hat also für diese Messung die Gleichung
$\delta = 24981''30 + 24981\,x + 113{,}63\,y.$

Zur Bestimmung von x und y erhält man als ndem in dieser sowohl als in der aus der französ

ung abgeleiteten Gleichung statt δ die be-
Werthe gesetzt werden
$'''40 = 44532\,x + 2{,}02\,y.$
$'''95 = 24981\,x + 113{,}63\,y.$
igt $x = 0{,}00000870,\quad y = 0{,}0064471.$

§. 228.

ie wahrscheinlichsten Werthe von x und y
in §. 224. aus einander gesetzten Princip
wird man folgendermassen verfahren müs-
ey N die beobachtete Polhöhe am südlichen
e der Messung, $N + \delta$ die an irgend einem
nkte beobachtete, so wird δ die beobach-
litude seyn. Die Polhöhe N sey mit dem
. die Polhöhe $N + \delta$ mit dem Fehler n' be-
dass die eigentlichen wahrscheinlichen Pol-
$N + n$ und $N + \delta + n'$ sind; die wahr-
hste Amplitude wird daher $\delta + n' - n$ be-
die sich aus der in den vorigen Paragraphen
ten Rechnungen durch $\delta' + \delta' x + 6y$ dar-
isst, so dass

$$\delta + n' - n = \delta' + \delta' x + 6y$$

nn man $\delta' - \delta = \Delta'$ setzt

$$n' = n + \Delta' + \delta' x + 6' y.$$

δ', $6'$ bekannte Grössen sind. Wenn daher
er Messung die Polhöhen am m Punkten be-
ist, so erhält man $m - 1$ solcher Gleichun-
denen $m + 2$ unbekannte Grössen enthalten
Diese Gleichungen werden die Bedingungs-
hungen genannt. Für eine andere Messung
die Grössen die wir hierbei durch n, n', n''....
hnet haben, n_0, n_0', n_0'' . . ., und so für alle
n Messungen die man mit in Betracht ziehen
Bezeichnet man die Summe der Quadrate aller
Fehler durch V, so verlangt das zum Grunde
e Princip, dass V ein Minimum sey; nun sind
hler von x und y und den Fehlern der ersten
he in den Gleichungen abhängig gemacht, und
wischen x und y keine Relation weiter statt
so wenig als zwischen den Fehlern der ersten
hen an den südlichen Endpunkten des Bogens,

er wenn man an die Stelle von n', n'' .... und ren partiellen Differentialen ihre Werthe aus den dingungsgleichungen setzt

$$\left.\begin{array}{l} \delta'(n+\Delta'+\delta' x+6' y) \\ \quad +\delta''(n+\Delta''+\delta'' x+6'' y) \\ +\delta'''(n+\Delta'''+\delta''' x+6''' y) \\ \quad +\delta^{\mathrm{IV}}(n+\Delta^{\mathrm{IV}}+\delta^{\mathrm{IV}} x+6^{\mathrm{IV}} y) \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} 6'(n+\Delta'+\delta' x+6' y) \\ \quad +6''(n+\Delta''+\delta'' x+6'' y) \\ +6'''(n+\Delta'''+\delta''' x+6''' y) \\ \quad +6^{\mathrm{IV}}(n+\Delta^{\mathrm{IV}}+\delta^{\mathrm{IV}} x+6^{\mathrm{IV}} y) \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} n+(n+\Delta'+\delta' x+6' y) \\ \quad +(n+\Delta''+\delta'' x+6'' y) \\ +(n+\Delta'''+\delta''' x+6''' y) \\ \quad +(n+\Delta^{\mathrm{IV}}+\delta^{\mathrm{IV}} x+6^{\mathrm{IV}} y) \end{array}\right\} = 0.$$

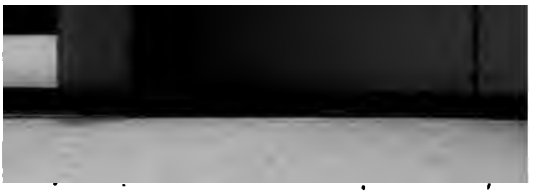
wo die erste die Fundamentalgleichung für x, die zweite für y, die dritte für n ist.

§. 230.

Aus der genauern Betrachtung der Zusammensetzung dieser Fundamentalgleichungen sieht man sogleich, dass dieselben aus den Bedingungsgleichungen folgendermassen gebildet werden können: Man füge zu den Gleichungen $n'=0$, $n''=0$, $n'''=0$, $n^{\mathrm{IV}}=0$, die auf die angegebene Art aus n, x, y gebildet sind, noch die Gleichung $n=0$ hinzu, und um die zu einer unbekannten Grösse, etwa x, gehörende Fundamentalgleichung zu finden, multiplicire man die ganze Bedingungsgleichung mit demjenigen Coefficienten welchen x in ihr besitzt. Hierauf addirt man diese Producte, so giebt die Summe die verlangte Fundamentalgleichuug an.

Auf dieselbe Art wird man auch zu verfahren haben, wenn mehrere Messungen die verschiedene Anfangspunkte haben, zu verbinden sind.

Uebrigens zeigt sich leicht, dass die Summe der Fehler der Polhöhen in jeder Messung Null seyn muss, d. h. $n+n'+n''+n'''+n^{\mathrm{IV}}=0$, und man kann diesen Satz dazu anwenden, um die Richtigkeit der erhaltenen Resultate zu prüfen. Der Be-



weis ergiebt sich aus der dritten Fundamentalform des vorigen Paragraphs.

§. 231.

Die Data, auf welche wir unsere Rechnungen bauen wollen, sind folgende:

Peruanische Messung.

	Polhöhen	δ	s in Toisen	Fehler
Tarqui	— 3° 4′ 30″83			+ π′
Cotchesqui	+ 0. 2. 37. 83	11228″66	176866,17	π″

Erste Ostindische Messung.

Trivandeporum	+ 11° 44′ 52″59			ω′
Paudree	13. 18. 49,02	5696,43	89815,43	ω″

Zweite Ostindische Messung.

Punnae	8. 9. 38,39			Ω′
Putchapolliam	10. 59. 48,93	10210,54	160935,18	Ω″
Dodagoontah	12. 59. 59,91	17421,52	274678,94	Ω‴
Namthabad	15. 6. 0,64	24982,25	393810,72	Ω^IV

Französische Messung.

Formentera	38. 39. 56,11			φ′
Montjouy	41. 21. 45,45	9709,34	153605,8	φ″
Barcelona	41. 22. 47,16	9771,05	154554,8	φ‴
Perpignan	42. 41. 58,01	14521,90	229669,8	φ^IV
Carcassonne	43. 12. 54,31	16378,20	259104,8	φ^V
Evaux	46. 10. 42,19	27046,08	427951,5	φ^VI
Pantheon	48. 50. 48,94	36652,83	580244,6	φ^VII
Dünkirchen	51. 2. 8,74	44532,63	705189,4	φ^VIII

Hannoversche Messung.

Göttingen	51° 31. 47,85			γ′
Altona	53. 32. 45,27	7257,42	115163,27	γ″

Englische Gradmessung.

	Polhöhen	δ	s in Toisen	Fehler
unnose	50. 37. 8,21			ε′
reenwich	51. 28. 40,00	3091,79	49057,1	ε″
nheim	51. 50. 27,90	4399,69	69825,3	ε‴
rburyhill	52. 13. 28,19	5779,98	91691,3	ε^{iv}
lifton	53. 27. 31,99	10223,78	162066,9	ε^{v}

Schwedische Gradmessung.

allörn	65. 31. 31,06	5840,35	92760,73	σ′
ahtawara	67. 8. 51,41			σ″

§. 232. (siehe die Formeln Seite IV–V)

Aus diesen Angaben erhält man nun folgende Bedingungsgleichungen, indem um die grossen Zahlen bei x zu vermeiden, $1000\,x = u$ gesetzt wird:

$$\pi' = \pi'$$
$$\pi'' = \pi' - 4{,}79 + 11{,}22\,u + 55{,}38\,y.$$

$$\omega' = \omega'$$
$$\omega'' = \omega' + 0{,}66 + 5{,}70\,u + 25{,}51\,y.$$

$$\Omega' = \Omega'$$
$$\Omega'' = \Omega' - 0{,}35 + 19{,}21\,u + 47{,}66\,y.$$
$$\Omega''' = \Omega' + 3{,}78 + 17{,}43\,u + 80{,}13\,y.$$
$$\Omega^{iv} = \Omega' - 0{,}95 + 24{,}98\,u + 113{,}63\,y.$$

$$\varphi' = \varphi'$$
$$\varphi'' = \varphi' - 1{,}17 + 9{,}71\,u + 8{,}52\,y.$$
$$\varphi''' = \varphi' - 2{,}91 + 9{,}77\,u + 8{,}56\,y.$$
$$\varphi^{iv} = \varphi' - 8{,}02 + 14{,}51\,u + 11{,}02\,y.$$
$$\varphi^{v} = \varphi' - 4{,}92 + 16{,}37\,u + 11{,}71\,y.$$
$$\varphi^{vi} = \varphi' - 10{,}02 + 27{,}04\,u + 12{,}52\,y.$$
$$\varphi^{vii} = \varphi' - 3{,}87 + 36{,}65\,u + 7{,}22\,y.$$
$$\varphi^{viii} = \varphi' - 0{,}40 + 44{,}53\,u + 2{,}02\,y.$$

$$\gamma' = \gamma'$$
$$\gamma'' = \gamma' + 5''51 + 7{,}26\,u - 9{,}27\,y.$$

$$0 = 10{,}21\,\Omega' - 3{,}57 + 104{,}24\,u + 486{,}61\,y.$$
$$0 = 17{,}43\,\Omega' + 65{,}88 + 303{,}80\,u + 1396{,}67\,y.$$
$$0 = 24{,}98\,\Omega' - 23{,}73 + 624{,}00\,u + 2838{,}48\,y.$$
$$0 = 9{,}71\,\varphi' - 11{,}36 + 94{,}28\,u + 82{,}73\,y.$$
$$0 = 9{,}77\,\varphi' - 28{,}43 + 95{,}45\,u + 83{,}63\,y.$$
$$0 = 14{,}51\,\varphi' - 116{,}37 + 210{,}54\,u + 159{,}90\,y.$$
$$0 = 16{,}37\,\varphi' - 80{,}54 + 267{,}98\,u + 191{,}70\,y.$$
$$0 = 27{,}04\,\varphi' - 270{,}91 + 731{,}47\,u + 338{,}54\,y.$$
$$0 = 36{,}65\,\varphi' - 141{,}84 + 1343{,}10\,u + 264{,}61\,y.$$
$$0 = 44{,}53\,\varphi' - 17{,}81 + 1982{,}90\,u + 89{,}95\,y.$$
$$0 = 7{,}26\,\gamma' + 40{,}00 + 52{,}71\,u - 67{,}30\,y.$$
$$0 = 3{,}09\,\varepsilon' + 8{,}65 + 9{,}55\,u - 9{,}83\,y.$$
$$0 = 4{,}41\,\varepsilon' + 21{,}43 + 19{,}45\,u - 20{,}64\,y.$$
$$0 = 5{,}78\,\varepsilon' + 21{,}27 + 33{,}41\,u - 36{,}65\,y.$$
$$0 = 10{,}22\,\varepsilon' - 21{,}05 + 104{,}45\,u - 120{,}90\,y.$$
$$0 = 5{,}84\,\sigma' - 14{,}31 + 34{,}11\,u - 114{,}82\,y.$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen, so erhält man die Fundamentalgleichung für u.

$$0 = 11{,}22\,\pi' + 5{,}70\,\omega' + 52{,}62\,\Omega' + 158{,}58\,\varphi' + 7{,}26\,\gamma' + 23{,}50\,\varepsilon' + 5{,}84\,\sigma' - 622{,}63 + 6169{,}52\,u + 6329{,}45\,y.$$

und da aus den Werthen von π', ω', Ω' . . . . aus vorigem Paragraph

$$11{,}22\,\pi' = + 26{,}87 - 62{,}94\,u - 310{,}68\,y.$$
$$5{,}70\,\omega' = - 1{,}88 - 16{,}24\,u - 72{,}70\,y.$$
$$52{,}62\,\Omega' = - 32{,}62 - 662{,}22\,u - 3175{,}88\,y.$$
$$158{,}58\,\varphi' = + 619{,}89 - 3143{,}37\,u - 1226{,}43\,y.$$
$$7{,}26\,\gamma' = - 20{,}00 - 26{,}35\,u + 33{,}65\,y.$$
$$23{,}50\,\varepsilon' = - 43{,}62 - 110{,}45\,u + 122{,}34\,y.$$
$$5{,}84\,\sigma' = + 7{,}15 - 17{,}05\,u + 57{,}41\,y.$$

also auch, wenn man diese Werthe zusammen nimmt

$$11{,}22\,\pi' + 5{,}70\,\omega' + 52{,}62\,\Omega' + 158{,}58\,\varphi' + 7{,}26\,\gamma' + 23{,}50\,\varepsilon' + 5{,}84\,\sigma' = + 555{,}79 - 4068{,}62\,u - 4566{,}29\,y.$$

so hat man zwischen u und y die erste Gleichung

$$0 = - 66{,}84 + 2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y.$$

§. 235.

Auf gleiche Weise erhält man die Producte zur Bildung der Fundamentalgleichung für y.

$$0 = + 55{,}38\,\pi' - 265{,}97 + 621{,}36\,u + 3066{,}94\,y.$$
$$0 = + 25{,}51\,\omega' + 16{,}84 + 145{,}41\,u + 650{,}76\,y.$$

$$2100{,}90u + 1763{,}16y = 66{,}84.$$
$$*) \; 1763{,}13u + 9348{,}66y = 173{,}78.$$

und man findet aus denselben

$$y = + 0{,}014955.$$
$$u = + 0{,}019264.$$

Es ergiebt sich hieraus, wenn man bedenkt, dass $3000x = u$, nach §. 226.

$$a = \frac{1}{302{,}78} \cdot (1 + 0{,}014955).$$

$$f = \frac{57009{,}76}{1 + 0{,}000019264} \text{ Toisen}$$

oder wenn man die Rechnung wirklich ausführt, so erhält man

$$\text{die Abplattung} = \frac{1}{298{,}3186}$$

und 360 Theil des Erdmeridians = 57008,662 Toisen.

§. 237.

Substituirt man die hier gefundenen Werthe in die Gleichungen der §§. 231 und 232., so kommen die bei Bestimmung der Polhöhen begangenen Fehler inclusive der Ablenkung des Pendels

$$\pi' = + 1''87, \quad \pi'' = - 1''87$$
$$\omega' = - 0''58, \quad \omega'' = + 0''57$$
$$\Omega' = - 1''78, \quad \Omega'' = - 1''22, \quad \Omega''' = + 3''54,$$
$$\Omega^{IV} = - 0''54,$$
$$\varphi' = + 3''40, \quad \varphi'' = + 2''25, \quad \varphi''' = + 0''82,$$
$$\varphi^{IV} = - 4''16,$$
$$\varphi^{V} = - 1''02, \quad \varphi^{VI} = - 5''88, \quad \varphi^{VII} = + 0''37,$$
$$\varphi^{VIII} = + 3''92,$$
$$\gamma' = - 2''76, \quad \gamma'' = + 2''76,$$
$$\varepsilon' = - 1''87, \quad \varepsilon'' = + 0''94, \quad \varepsilon''' = + 3''01,$$
$$\varepsilon^{IV} = + 1''83, \quad \varepsilon^{V} = - 3''91,$$
$$\sigma' = + 1''31, \quad \sigma'' = - 1''31.$$

Quadrirt man diese einzelnen Fehler und addirt sie zusammen, so erhält man die Summe 163″17,

*) Eigentlich sollte dieser Coefficient von u dem von y in der ersten Gleichung völlig gleich seyn; dieser kleine Unterschied ist nur durch die vielen Additionen und Subtractionen entstanden, er trägt aber nichts zur Aenderung des Resultates bei.

$$57009 - \Delta f = \frac{57009}{1 + 0{,}000075939}.$$

erhält man $\Delta a = 10{,}7$, $\Delta f = 4{,}3$ Toisen.

Anmerkung. Die hier gegebenen Bestimmungen der Gestalt der Erde weichen etwas von denen ab, welche ich früher gemacht habe, und die Herr Hofr. Gauss seiner Abhandlung Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona angehängt hat. Diese Unterschiede rühren daher, dass durch ein Versehen der Coefficient von y grade um tausend zu gross genommen war.

§. 239.

Man hat also die Polhöhen auf demjenigen Sphäoïd, welches den §. 231. angegebenen Messungen am besten sich anpasst, in

Tarqui	=	—	3° 04′	30″83	+ 1″87
Cotchesqui	=	+	0. 02.	37,83	— 1,87
Trivandeporum	=		11. 44.	52,59	— 0,58
Paudree	=		13. 19.	49,02	+ 0,57
Punnae	=		8. 09.	38,39	— 1,78
Putchapolliam	=		10. 59.	48,93	— 1,22
Dodagoontah	=		12. 59.	59,91	+ 3,54
Namthabad	=		15. 06.	00,64	— 0,54
Formentera	=		38. 39.	56,11	+ 3,40
Montjouy	=		41. 21.	45,45	+ 2,55
Barcelona	=		41. 22.	47,16	+ 0,82
Perpignan	=		42. 41.	58,01	— 4,16
Carcassonne	=		43. 12.	54,31	— 1,02
Evaux	=		46. 10.	42,19	— 5,88
Pantheon	=		48. 50.	48,94	+ 0,37
Dünkirchen	=		51. 02.	08,74	+ 3,92
Göttingen	=		51. 31.	47,85	— 2,76
Altona	=		53. 32.	45,27	+ 2,76
Dunnose	=		50. 37.	08,21	— 1,87
Greenwich	=		51. 28.	40,00	+ 0,94
Blenheim	=		51. 50.	27,90	+ 3,01
Arburyhill	=		52. 13.	28,19	+ 1,83
Clifton	=		53. 27.	31,99	— 3,91
Mallörn	=		65. 31.	31,06	+ 1,31
Pahtawara	=		67. 08.	51,41	— 1,31.

So ist z. B. in Göttingen die Polhöhe auf dem idealen Sphäroïd kleiner, als auf der Erde selbst, und man kann hieraus schliessen, dass das Loth von der Normale nach Süden zu abweicht. Die Totalablenkung lässt sich aber nicht angeben, so wenig als die eigentliche Richtung nach der zu das Loth abgelenkt wird; nur so viel ist einleuchtend, dass sie nach einem Punkte des Horizonts zu geht, der auf der südlichen Hälfte des Horizonts befindlich ist.

§. 240.

Wollte man die peruanische Gradmessung von diesen Untersuchungen ausschliessen, so hat man leicht die Fundamentalgleichung für x und y in diesem Fall. Man braucht nämlich nur zu den vorigen beiden Fundamentalgleichungen

$$0 = -\ 66{,}84 + 2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y$$
$$0 = -\ 173{,}78 + 1763{,}13\,u + 9348{,}66\,y$$

wie man bei geringer Ueberlegung sieht, die Gleichungen

$$0 = +\ 26{,}87 - 62{,}94\,u - 310{,}68\,y$$
$$0 = +\ 132{,}63 - 310{,}68\,u - 1533{,}48\,y$$

zu addiren, wo die hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Grössen nichts anders sind, als die Werthe von $11{,}22\,\pi'$ und $55{,}38\,\pi'$. Man erhält dann:

$$0 = -\ 39{,}97 + 2037{,}96\,u + 1452{,}48\,y$$
$$0 = -\ 41{,}15 + 1452{,}45\,u + 7815{,}18\,y.$$

Hieraus ergeben sich für y und u die Werthe

$$y = +\ 0{,}0018677$$
$$u = +\ 0{,}0182820.$$

$$\text{Abplattung} = \frac{1}{302{,}22}$$

Dreihundert und sechszigster Theil des Erdmeridians = 57008,72 Toisen.

Dieser Werth der Abplattung ist von dem, welchen Walbeck fand, nur wenig unterschieden, der mittlere Werth des Grades hingegen, liegt dem §. 236. entwickelten sehr nahe. Durch diese Werthe von u und y findet sich $\pi' = +\ 2{,}13$, $\pi'' = -\ 1''95$. Die übrigen Fehler zeigt folgende Tabelle:

$$\omega'' = +0''40.$$
$$\Omega'' = -1''05, \quad \Omega''' = +3''28,$$
$$\Omega^{IV} = -1''25.$$
$$\varphi'' = +2''58, \quad \varphi''' = +0''84,$$
$$\varphi^{IV} = -4''20.$$
$$\varphi^{VI} = -5''97, \quad \varphi^{VII} = +0''33,$$
$$\varphi^{VIII} = +3''94.$$
$$\gamma'' = +2''80.$$
$$\varepsilon'' = +0''91, \quad \varepsilon''' = +3''00,$$
$$\varepsilon^{IV} = +1''84, \quad \varepsilon^{V} = -3''83.$$
$$\sigma'' = -1''23.$$

ıme der Quadrate der Fehler macht
ıit 23 — 8 = 15 dividirt und aus dem
: Quadratwurzel gezogen, giebt
ı Fehler einer Polhöhe = 3″214
l grösser als in dem Fall, wenn man
ıe Messung mit in Rechnung zieht. Man
das Gewicht von $u = 1768$,
— — — $\gamma = 6785$,
zu befürchtenden Fehler in $u = 0{,}07643$
— — — — $\gamma = 0{,}03902$
$\Delta\alpha = 11{,}8$, $\Delta f = 4{,}5$, indem man
38. angegebenen Methode verfährt.

§. 241.

lgenden Rechnungen wollen wir immer
gegebene Abplattung nebst dem Werthe
ert und sechszigsten Theils des Erdme-
den mittlern Grad des Meridians zum
, und um die Rechnungen zu erleich-
ie briggschen Logarithmen dieser Grös-
lemal hier mit bemerkt werden.
$\alpha = 7.5253196 - 10$
$f = 4.7559408.$
irt man die Länge $f = 57008{,}662$ Toi-
o erhält man die Länge des Quadranten
ans = 5130779,58 Toisen. Nun war die
timmung der Länge des Meter
'oisen, welcher Werth aus der franzö-
ng von Formentera bis Dünkirchen folg-
an der Länge des Quadranten des Erd-
ın Millionen Meter beilegte, also enth

eigentlich die Länge des Erdquadranten 10000007,71 Meter.

§. 242.

Wir haben aus §. 225. die Gleichung

$$90f = \tfrac{1}{4}\pi a\,(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha).$$

wo a die halbe grosse Axe oder den Halbmesser des Aequators bedeutet. Bezeichnet man also den Quadranten des Erdmeridians durch E, den Umfang des Erdaequators durch Q, so ist $E = 90f$, $Q = 2\pi a$, also wenn man vermittelst dieser Werthe die Grösen f, a aus voriger Gleichung eliminirt

$$E = \tfrac{1}{4}Q\,(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha)$$

und wenn man mit dem Coefficienten von Q auf beiden Seiten dividirt

$$Q = 4E\,(1 + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{3}{16}\alpha\alpha).$$

oder in Toisen ausgedrückt, findet sich

Umfang des Aequators = 20557561 Toisen

Da dieselbe Länge auch 5400 geographische Meilen beträgt, so erhält man

die geographische Meile = 3806,955 Toisen
— — — = 7421,340 Meter.

Ferner ergiebt sich noch

Halbmesser des Aequators = 3271837,5 Toisen = a
Halbe Erdaxe = 3260~~920,3~~ 562,6 — = b

§. 243.

Bezeichnen wir den Halbmesser des Krümmungskreises an irgend einer Stelle des Meridians, deren Polhöhe $= v$ ist durch ρ, so ist bekanntlich $\rho dv = ds$; nun haben wir aus §. 225. die Gleichung

$$ds = adv\left[(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha\cos 2v. + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha.\cos 4v\right]$$

also auch, wenn statt ds, ρdv gesetzt und auf beiden Seiten durch dv dividirt wird

$$\rho = a(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha) - \tfrac{1}{2}a\alpha\cos 2v + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha\alpha\cos 4v.$$

Dies giebt in Zahlen, vermittelst der Werthe von a und α

$$\rho = 3266356' - 16451'\cos 2v + 34'\cos 4v.$$

Für $v = 45°$ erhält man $\rho = 3266322$ Toisen.

§. 244.

Setzt man die Länge des Radius Vectors der Erde für einen Punkt, dessen Coordinaten vom Mittelpunkt derselben ausgerechnet x, y, z sind, gleich r, d. h. die Länge derjenigen Linie, welche vom Mittelpunkte der Erde bis an den besagten Punkt gezogen wird, so hat man

$$rr = xx + yy + zz.$$

und da §. 179. für das elliptische Sphäroïd

$$x = a \cos t. \cos u, \quad y = a \sin t. \cos u, \quad z = b \sin u$$

gesetzt wurde, so hat man indem diese Werthe in dem Ausdruck von rr substituirt werden

$$rr = aa \cos u^2 + bb \sin u^2.$$

Nun war ferner $a \operatorname{tang} u = b \operatorname{tang} v$, also

$$\cos u^2 = \frac{aa \cos v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

$$\sin u^2 = \frac{bb \sin v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

und wenn man diese Werthe in vorigen Ausdruck substituirt, so kommt

$$rr = \frac{a^4 \cos v^2 + b^4 \sin v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2}.$$

Setzt man statt b, $a(1-\alpha)$, so wird auch mit Vernachlässigung der Potenzen von α die das Quadrat übersteigen,

$$rr = aa. \frac{1 - \alpha(4 - 6\alpha) \sin v^2}{1 - \alpha(2 - \alpha) \sin v^2}$$

$$= aa[1 - 2\alpha \sin v^2 - 4\alpha\alpha \sin v^4 + 5\alpha\alpha \sin v^2]$$

wo der letzte Ausdruck dadurch gefunden ist, dass man mit dem Nenner wirklich in den Zähler dividirt hat. Zieht man vermittelst des binomischen Lehrsatzes die Quadratwurzel aus, so wird

$$r = a[1 - \alpha \sin v^2 + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin v^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin v^4].$$

Man setze $\sin v^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2v$, $\sin v^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2v + \frac{1}{8}\cos 4v$, so erhält man, indem der Ausdruck von r nach dem Vielfachen des Winkels v geordnet wird

$$r = a(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{5}{16}\alpha\alpha) + \tfrac{1}{2}\alpha \cos 2v - \tfrac{5}{16}\alpha\alpha \cos 4v$$

oder in Zahlen ausgedrückt

$$r = 3263365' + 5484' \cos 2v - 11 \cos 4v.$$

§. 245.

Bezeichnet man den Winkel, welchen der Radius Vector r mit der Ebene des Aequators macht, durch φ, so hat man $\frac{z}{r} = \sin\varphi$, und dieser Winkel ist nichts anders, als die sogenannte geocentrische Breite des Ortes. Wir wollen nun aufsuchen welcher Unterschied im Allgemeinen zwischen der geocentrischen und der geographischen Breite, oder der Polhöhe statt findet.

Es ist $z = b \sin u$, $r = \sqrt{aa\cos u^2 + bb \sin u^2}$, also

$$\sin\varphi = \frac{b \sin u}{\sqrt{aa\cos u^2 + bb \sin u^2}},$$

$$= \frac{b \operatorname{tang} u}{\sqrt{aa + bb \operatorname{tang} u^2}}.$$

Setzt man hierin statt $\operatorname{tang} u$; $\frac{b}{a} \operatorname{tang} v$, so wird

$$\sin\varphi = \frac{bb \operatorname{tang} v}{\sqrt{a^4 + b^4 \operatorname{tang} v^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{aa}{\sqrt{a^4 + b^4 \operatorname{tang} v^2}}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{bb}{aa} \operatorname{tang} v.$$

oder auch $\operatorname{tang}\varphi = (1-\alpha)^2 \operatorname{tang} v$. Es wird also φ immer kleiner als v bleiben; setzt man daher $v = \varphi + \lambda$, so wird

$$\operatorname{tang}(v-\lambda) = (1-\alpha)^2 \operatorname{tang} v.$$

Hieraus erhält man leicht

$$\operatorname{tang}\lambda = \alpha(1+\tfrac{1}{2}\alpha)\sin 2v - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin 4v.$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem λ und v als veränderlich betrachtet werden und setzt $d\lambda = 0$, so erhält man zur Bestimmung des Werthes von v, welcher $\frac{d\lambda}{dv}$ Null macht

$$0 = (1+\tfrac{1}{2}\alpha)\cos 2v - \alpha \cos 4v \text{ oder auch}$$

$$0 = (1+\tfrac{1}{2}\alpha)\cos 2v - 2\alpha \cos 2v^2 - \alpha,$$

d man findet $\cos 2v = \alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha$, und bei diesem erthe von v wird der Unterschied λ zwischen der graphischen und geocentrischen Breite ein Maxiam seyn.

Will man statt der $tang\,\lambda$ den Winkel λ selbst ben, so braucht man nur zu bemerken, dass

$$\lambda = tang\,\lambda - \tfrac{1}{3}\,tang\,\lambda^3 + \ldots;$$

lange man aber alle Potenzen von α, die höher als Quadrat sind, weglässt, wird $\lambda = tg\,\lambda$ gesetzt rden müssen, da das Glied $tg\,\lambda^3$, schon mit dem bus von α anfangen würde. Es ist daher auch

$$\lambda = \alpha(1 + \tfrac{1}{2}\alpha)\,\sin 2v - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha\,\sin 4v. \text{ oder}$$

$$\lambda = 692''4\,\sin 2v - 1''\,\sin 4v.$$

n Werth von v wo λ ein Grösstes ist, findet man $44^\circ\ 54'\ 15''$.

§. 246.

Ist der Abstand eines Punktes von der Drehungse der Erde gleich R, so hat man $RR = xx + yy$, hr auch, da $x = a\cos t\cos u$, $y = a\sin t\cos u$, $R = aa\cos u^2$. Zerlegt man die ganze Erde in endlich schmale Scheiben, indem dieselbe durch enen geschnitten wird, welche dem Aequator pallel liegen, so ist der körperliche Inhalt einer solen Scheibe die als ein Cylinder von unendlich kleiin Höhen betrachtet werden kann $= \pi RRdz$. Nun ar aber auch $z = b\sin u$, also $dz = b\cos u\,du$; zeichnet man daher den Inhalt dieser Scheibe durch V, so wird $dV = aab\cos u^3\,du$, oder da $\cos u^3 = \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u$, so ist auch

$$dV = \frac{\pi aab}{4}(\cos 3u.\,du + 3\cos u.\,du).$$

tegrirt man dies, so kommt

$$V = \text{Const.} + \frac{\pi aab}{4}(\tfrac{1}{3}\sin 3u + 3\sin u).$$

Am Aequator ist $z = 0$, also auch $u = 0$; soll ther am Aequator $V = 0$ seyn, so ist Const. $= 0$, nd $V = \frac{\pi aab}{4}(\frac{1}{3}\sin 3u + 3\sin u)$.

Am Pole hat man $z = b$, also $u = 90^\circ$, und enn man diesen Werth in vorige Formel setzt, so

erhält man den körperlichen Inhalt des halben Erd sphäroïds $= \frac{2}{3}\pi aab$, also den Inhalt der ganzen Erd $= \frac{4}{3}\pi aab$. Um dies in geographischen Cubikmeile auszudrücken, schreibe man die Formel so

$\frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot (2a\pi)^3$. Nun ist $2a\pi$ der Umfang des Ä $= 5400$ geographischen Meilen, also wird der Inhal der Erde $= \frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot 5400)^3 = 26502$ Millione Cubikmeilen. Der Halbmesser einer Kugel dere Inhalt dem der Erde gleich ist, wird

$= \sqrt[3]{aab} = 3268194$ Toisen.

§. 247.

Der Inhalt der Fläche, welcher von zwei Parallelkreisen eingeschlossen wird, deren Polhöhen v und $v + dv$ sind, beträgt $2\pi Rds = dS$, wo R die Bedeutung des vorigen Paragraphs beibehält, und ds das Element des elliptischen Meridians angiebt. Nun ist $R = a \cos u$, $\cos u = \frac{a \cos v}{\sqrt{aa \cos v^2 + bb \sin v^2}}$

$= \frac{\cos v}{\sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon \sin v^2}}$, $ds = \frac{a(1 - \varepsilon\varepsilon)\, dv}{\sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon \sin v^2}^3}$, folglich

$$dS = 2\pi aa(1 - \varepsilon\varepsilon) \frac{dv \cdot \cos v}{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin v^2)^2}$$
$$= 2\pi aa(1 - \varepsilon\varepsilon) \cdot d \cdot \sin v \cdot [1 + 2\varepsilon\varepsilon \sin v^2 + 3\varepsilon^4 \sin v^4]$$

folglich integrirt

$$S = Const. + 2\pi aa(1 - \varepsilon\varepsilon) \cdot \sin v \,(1 + \tfrac{2}{3}\varepsilon\varepsilon \sin v^2 + \tfrac{3}{5}\varepsilon^4 \sin v^4).$$

Es ist aber auch

$$\sin v^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2v, \quad \sin v^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2v + \tfrac{1}{8}\cos 4v,$$

also

$$S = Const. + 2\pi aa \sin v \left[(1 - \tfrac{2}{3}\varepsilon\varepsilon - \tfrac{11}{15}\varepsilon^4) - (\tfrac{1}{3}\varepsilon\varepsilon - \tfrac{1}{5}\varepsilon^4)\cos 2v + \tfrac{3}{35}\varepsilon^4 \cos 4v.\right]$$

oder wenn man statt der Eccentricität die Abplattung einführt, so dass $\varepsilon\varepsilon = 2\alpha - \alpha\alpha$.

$$S = Const. + 2\pi aa \sin v \left[(1 - \tfrac{4}{3}\alpha + \tfrac{7}{15}\alpha\alpha) - (\tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{7}{15}\alpha\alpha)\cos 2v + \tfrac{3}{15}\alpha\alpha \cos 4v\right]$$

$$2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y = 66{,}84.$$
$$*)\ 1763{,}13\,u + 9348{,}66\,y = 173{,}78.$$

und man findet aus denselben

$$y = +\,0{,}014955.$$
$$u = +\,0{,}019264.$$

Es ergiebt sich hieraus, wenn man bedenkt, dass $1000x = u$, nach §. 226.

$$a = \frac{1}{302{,}78} \cdot (1 + 0{,}014955).$$

$$f = \frac{57009{,}76}{1 + 0{,}000019264} \text{ Toisen}$$

oder wenn man die Rechnung wirklich ausführt, so erhält man

$$\text{die Abplattung} = \frac{1}{298{,}3186}$$

den 360 Theil des Erdmeridians = 57008,662 Toisen.

§. 237.

Substituirt man die hier gefundenen Werthe in die Gleichungen der §§. 231 und 232., so kommen die bei Bestimmung der Polhöhen begangenen Fehler inclusive der Ablenkung des Pendels

$$\pi' = +\,1''87, \quad \pi'' = -\,1''87$$
$$\omega' = -\,0''58, \quad \omega'' = +\,0''57$$
$$\Omega' = -\,1''78, \quad \Omega'' = -\,1''22, \quad \Omega''' = +\,3''54,$$
$$\Omega^{IV} = -\,0''54,$$
$$\varphi' = +\,3''40, \quad \varphi'' = +\,2''25, \quad \varphi''' = +\,0''82,$$
$$\varphi^{IV} = -\,4''16,$$
$$\varphi^{V} = -\,1''02, \quad \varphi^{VI} = -\,5''88, \quad \varphi^{VII} = +\,0''37,$$
$$\varphi^{VIII} = +\,3''92,$$
$$\gamma' = -\,2''76, \quad \gamma'' = +\,2''76,$$
$$\varepsilon' = -\,1''87, \quad \varepsilon'' = +\,0''94, \quad \varepsilon''' = +\,3''01,$$
$$\varepsilon^{IV} = +\,1''83, \quad \varepsilon^{V} = -\,3''91,$$
$$\sigma' = +\,1''31, \quad \sigma'' = -\,1''31.$$

Quadrirt man diese einzelnen Fehler und addirt sie zusammen, so erhält man die Summe 163″17,

*) Eigentlich sollte dieser Coefficient von u dem von y in der ersten Gleichung völlig gleich seyn; dieser kleine Unterschied ist nur durch die vielen Additionen und Subtractionen entstanden, er trägt aber nichts zur Aenderung des Resultates bei.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

gesucht wird, eine Ebene, so wird die Lage Ebene vollständig bestimmt seyn, und die Ober- der Erde in einer krummen Linie schneiden. ischen beiden Punkten enthaltene Stück dieser en Linie kann dann als Maass der Entfernung mmen werden. Allein wenn man dieselbe Ope- am zweiten Punkte vornimmt und nach dem zugeht, so wird man eine andere Länge im einen erhalten, da beide krumme Linien nicht nenfallen. Sollte nämlich die erste Länge mit eiten übereinstimmen, so müsste die krumme n beiden Fällen dieselbe seyn, man möchte vom Punkt oder vom zweiten ausgehen, und hier- rde erforderlich seyn, dass die erste Ebene urch die am zweiten Punkt gezogene Normale hginge, folglich müssten beide Normalen sich en. Allein diese Bedingung wird nur in be- i Fällen, wo die beiden Punkte eine gewisse egen einander haben, erfüllt, welches sich uf folgende Weise zeigen lässt.

n bezeichne die drei Coordinaten des ersten s durch x, y, z, die des zweiten durch x', y', wird man vermöge der gegebenen Oberfläche le die beiden Differentialgleichungen

$$dz = pdx + qdy, \quad dz' = p'dx' + q'dy'$$

a, wo p und q Functionen von x und y, p' Functionen von x' und y' sind. Sind die all- en Coordinaten eines Punktes der Normale am Orte ξ, η, ζ, am zweiten ξ', η', ζ', so hat e Gleichungen für beide Normalen:

$$) + p(\zeta - z) = 0, \quad (\eta - y) + q(\zeta - z) = 0$$
$$) + p'(\zeta' - z') = 0, \quad (\eta' - y') + q'(\zeta' - z') = 0.$$

en beide Linien sich schneiden, so müssen die iaten des Durchschnittspunktes für beide Li- eselben seyn. Es wird daher für diesen Punkt $\eta = \eta'$, $\zeta = \zeta'$ werden. Die erste Bedin- ebt die Gleichung

$$' - x) + \zeta(p' - p) + z'p' - zp = 0;$$

eite Bedingung erfordert, dass

$$' - y) + \zeta(q' - q) + z'q' - zq = 0.$$

minirt man aus diesen beiden Gleichungen ζ, lt man nach einiger Reduction

$$' - x)(q - q') + (z' - z)(p'q - pq') = (y' - y)(p - p')$$

und diese Gleichung müsste ganz allgemein erfüllt werden, d. h. identisch seyn, wenn immer zwei s beliebigen Punkten der Oberfläche gezogene Normalen sich schneiden sollten. Dies ist aber keineswegs der Fall.

§. 250.

Sieht man diese Oberfläche als eine durch Umdrehung einer ebenen Figur entstandene an, wie es bei der Erde der Fall ist, und nimmt die Axe, welcher die Coordinaten z, z' parallel sind, als Umdrehungsaxe an, so wird die Gleichung einer solchen Oberfläche, wie früher gezeigt worden, durch $z = \varphi(xx + yy)$ ausgedrückt, wo φ eine willkührlich zu nehmende Function bedeutet. Diese Gleichung giebt, wenn man differentiirt

$$dz = 2x\,dx\,\varphi(xx + yy) + 2y\,dy\,\varphi(xx + yy)$$
$$dz' = 2x'dx'\varphi'(x'x' + y'y') + 2y'dy'\varphi'(x'x' + y'y')$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit denen in vorigem Paragraph angenommenen

$$dz = pdx + qdy, \quad dz' = p'dx' + q'dy'$$

so findet sich

$$p = 2x\varphi(xx + yy), \quad q = 2y\varphi'(xx + yy)$$
$$p' = 2x'\varphi'(x'x' + y'y'), \quad q' = 2y'\varphi'(x'x' + y'y').$$

also auch $py = qx$, $p'y' = q'x'$.

Setzt man in der Gleichung (1), $z = z'$, so reducirt sie sich auf

2) $(x' - x)(q - q') = (y' - y)(p - p')$.

In diesem Falle ist aber $\varphi(xx + yy) = \varphi(x'x' + y'y')$, also auch $xx + yy = x'x' + y'y'$, und daher wird $\varphi'(xx + yy) = \varphi'(x'x' + y'y')$, folglich geben die Gleichungen für p, q, p', q', die beiden neuen Gleichungen $px' = p'x$, $qy' = q'y$.

Zieht man bei der ersten auf beiden Seiten px, in der zweiten auf beiden Seiten qy ab, so kann man dieselben auch so schreiben

$$p(x' - x) = x(p' - p), \quad q(y' - p) = y(q' - q);$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe von $x' - x$ und $y' - y$ in der Gleichung (2), so wird

$$\frac{x}{p}(q - q')(p' - p) = \frac{y}{q}(q' - q)(p - p').$$

$= \frac{y}{q}$, $xq = yp$. Diese Gleichung ist aber
ı, wie man aus dem vorigen sieht. Ist da-
$= z'$, so schneiden sich die an diesen beiden
gezogenen Normalen wirklich, und diese
att, wenn beide Punkte auf demselben Paral-
liegen.

§. 251.

zt man $pq' - p'q = 0$, so reducirt sich die
ıg (1) ebenfalls auf die Gleichung (2). Zieht
ı der Gleichung $pq' = p'q$, die identische pq
ɔ, so wird

$$p(q' - q) = q(p' - p),$$

ın man den hieraus sich ergebenden Werth
$-q$ in die Gleichung

$$(x' - x)(q' - q) = (y' - y)(p' - p)$$

› erhält man

$$q(x' - x) = p(y' - y).$$

ım man in dem Ausdruck $pq' - p'q = 0$, die
von p, p', q, q', substituirt, erhält man xy'
$= 0$, also $(y' - y)x = y(x' - y)$, folglich
ese Gleichung mit der andern $q(x' - x =$
$'$) verbunden wird, so kommt $qx = py$, wel-
h identisch Null ist.

e Gleichung $xy' - yx' = 0$, giebt $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$,
$= kx$, $y' = kx'$ wo k eine willkührliche Grös-
Man sieht hieraus, dass der zweite Fall, dass
naien sich schneiden, dann statt findet, wenn
en Punkte auf einem und demselben Meri-
ɛn.

§. 252.

Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche
ɛ, lässt sich also nicht auf die früher ange-
Art bequem finden. Allein man kann sehr
zu der zweckmässigsten Art gelangen die
ng auszumitteln, wenn man nur die Methode
ɛt, nach welcher dieselbe mechanisch durch

Maassstäbe bestimmt wird. Indem man nämlich vo
einem Punkte der Erde bis zu einem andern miss
legt man einen Maassstab horizontal auf Unterlage
und an diesen ebenfalls horizontal einen zweiten, s
dass beide Maassstäbe zwar nicht in gerader Linie
da die Erde in ihren kleinsten Theilen gekrümmt ist,
aber doch in einer Ebene liegen, die zugleich durch
die am Berührungspunkte beider Stücke gezogene
Normale geht. Genau genommen wird freilich die
Länge der ganzen Linie von der Länge der Maass-
stäbe selbst abhängen, die desto kleiner ausfällt, je
kürzer die gebrauchten Maassstäbe selbst sind, allein
man sieht leicht, dass die Abnahme eine Gränze ha-
ben muss, die natürlich dann statt findet, wenn die
Maassstäbe unendlich klein sind, oder wenn man die
ganze Linie in ihre Elemente zerlegt. Die auf diese
Art bestimmte Linie heisst die geodätische Linie.
Um ihre Natur analytisch auszudrücken, wird man
die Gleichung einer krummen Linie auf einer Ober-
fläche suchen müssen, welche von der Beschaffenheit
ist, dass eine durch zwei in derselben auf einander
folgenden Elemente gelegte Ebene, zugleich durch die
am Punkte des Zusammenstossens beider Elemente
gezogene Normallinie geht.

Es seyen daher die Coordinaten des Anfangspunk-
tes des ersten Elements $x - dx$, $y - dy$, $z - dz$;
die des Endpunktes, welcher zugleich die des An-
fangspunktes des zweiten Elements sind, x, y, z;
und die Coordinaten des Endpunktes des zweiten Ele-
ments $x + dx$, $y + dy + ddy$, $z + dz + ddz$;
wo, wie man sieht dx als gleichförmig wachsend an-
genommen wird. Wir nehmen an, die Gleichung
der Ebene die durch diese drei Punkte geht sey

$$Z = AZ + BX + C.$$

wo X, Y, Z die allgemeinen Coordinaten jedes Punk-
tes der Ebene, A, B, C drei noch zu bestimmende
Coefficienten sind. Setzt man statt X, Y, Z nach
und nach die Coordinaten der drei Punkte, so er-
hält man

$$z - dz = A(x - dx) + B(y - dy) + C$$
$$z = Ax + By + C.$$
$$z + dz + ddz = A(x + dx) + B(y + dy + ddy) + C$$

welche Gleichungen sich auf folgende reduciren

$= Ax + By + C.$
$= Adx + Bdy\,; \quad ddz = Bddy.$

eht man die erste derselben von der allgemei-
, so bleibt

$$Z - z = A(X - x) + B(Y - y),$$

e beiden letzten Gleichungen geben

$$A = \frac{dzddy - dyddz}{dxddy}, \quad B = \frac{ddz}{ddy},$$

also die vollständige Gleichung der gesuchten

$$z' = \frac{dzddy - dyddz}{dxddy}(X - x) + \frac{ddz}{ddy}(Y - y)$$

Nun soll aber diese Ebene zugleich die Nor-
an dem Punkte dessen Coordinaten x, y, z
n sich enthalten. Die beiden Gleichungen für
formale sind (§. 249.)

$-z) + (X - x) = 0, \quad q(Z - z) + (Y - y) = 0$

wird, wenn wir diese Werthe von $X - x$,
in obige Gleichung substituiren, und dann
$dxddy$ multipliciren:

$y + (dzddy - dyddz)\,p + qdxddz = 0.$

die Differentialgleichung der geodätischen
ohne weitere Rücksicht auf die Gestalt der
che der Erde, blos als continuirlich krumme
che betrachtet, darstellt.

zt man statt dz seinen Werth $pdx + qdy$, so

$$pp)\,dxddy + pqdy.\,ddy = (pdy - qdy)\,ddz.$$

n ist aber auch, wenn man die Gleichung dz
$+ qdy$ differentiirt

$$ddz = dpdx + dqdy + qddy.$$

nn man diesen Ausdruck von ddz in vorige
ng setzt

$$pp + qq)\,dxddy = (pdy - qdx)\,dpdx + dqdy).$$

§. 253.

lässt sich leicht zeigen, dass die auf diese
ch zwei Punkte geführte Curve, unter allen
die kleinste Länge hat, so dass also die geo-
Linie die kürzeste Entfernung misst. Man

$$\int\frac{dy}{ds}\,\delta dy + \int pq\,\frac{dx}{ds}\,\delta x + \int qq\,\frac{dy}{ds}\,\delta dy$$
$$= \int\frac{dy + q\,dx}{ds}\,\delta dy.$$

so dass sich die ganze Gleichung, die vorher aus d
ben Gliedern bestand, auf

$$\int\frac{dx\,\delta x}{ds}\,dy + \int\frac{dy + q\,dx}{ds}\,\delta dy = 0$$

reducirt. Um nun aber die beiden übrig gebliebe
Integrale zusammen addiren zu können, muss m
die Grösse δdy aus dem letzten wegbringen; dies
erhielt leicht durch Integration, indem man dasse
aus zwei Factoren $\frac{dy + q\,dx}{ds}$ und δdy bestehend a
nimmt, und dann nach der bekannten Methode d
theilweisen Integration vermittelst der Formel $\int u$
$= uv - \int v\,du$ integrirt. Hierdurch erhält man

$$\int\frac{dy + q\,dx}{ds}\,\delta dy = \frac{dy + q\,dx}{ds}\,\delta y$$
$$- \int \delta y\,d\left(\frac{dy + q\,dx}{ds}\right)$$

Man bezeichne die Werthe von q, y, z, s fü
den Anfangspunkt der krummen Linie durch q', y'
z', s', für den Endpunkt durch q'', y'', z'', s'', so wir

erden soll, fest sind, die Ordinaten y' und y''
ien, keiner Aenderung fähig sind, also $\delta y' = 0$,
0 ist, und es bleibt

$$\frac{+ qdz}{ds} d\delta y = - \int \delta y . d.\left(\frac{dy' - q'dz'}{ds}\right).$$

an hat daher die Gleichung welche das Mini-
ausdrückt:

$$\frac{lzdq}{ds} \delta y - \int \delta y . d.\left(\frac{dy + qdz}{ds}\right) = 0.$$

ı, da das Differential derselben ebenfalls Null
ıuss, so kommt, indem der gemeinschaftliche
δy weggelassen wird

$$\frac{dzdq}{ds} - d.\left(\frac{dy + qdz}{ds}\right) = 0.$$

ntiirt man wirklich, so kommt nach den ge-
ı Reductionen

$$(ddy + qddz)\, ds = dds\,(dy + qdz).$$

§. 254.

Wir müssen nun noch zeigen, dass diese Glei-
mit der im vorigen Paragraph gefundenen iden-
st. Man nehme hierzu die Gleichung (§. 252.)

$$ly + (dzddy - dyddz)\, p + qdxddz = 0,$$

ın auch so schreiben kann:

$$dy + qddz)\, dx = p\,(dyddz - dzddy).$$

ultiplicirt man auf beiden Seiten mit dx, und
tatt pdx, $dz - qdy$, so kommt

$$dy + qddz)\, dx^2 = dzdyddz - dz^2ddy - qdy^2ddz + qdzdyddy.$$

ddire auf beiden Seiten das Product

$$(ddy + qddz)\,(dy^2 + dx^2)$$

ält man nach einigen Reductionen

$$+ qddz)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = dzdyddz + dy^2ddy + qdzdyddy + qdz^2ddz$$
$$= dy\,(dyddy + dzddz) + qdz\,(dyddy + dzddz)$$
$$= (dy + qdz)\,(dyddy + dzddz).$$

ın war aber $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, also
man differentiirt, und den frühern Annahmen
$ddx = 0$ setzt

$$dsdds = dyddy + dzddz$$

man sieht hieraus, dass vorige Gleichung sich in [illegible] verwandelt:

$$(ddy + qddz)\,ds^2 = (dy + qdz)\,ds.\,dds.$$

oder wenn man durch ds dividirt

$$ds\,(ddy + qddz) = dds\,(dy + qdz)$$

und diese Gleichung ist mit derjenigen, welche durch die Bedingung des Minimum gefunden wurde, völlig identisch.

§. 255.

Um nun die Gleichung der geodätischen Linie für den besondern Fall zu finden, dass wir die Erdoberfläche als ein elliptisches Sphäroïd betrachten, könnten wir die Werthe von x und y, welche dem Sphäroïd entsprechen, in voriger Gleichung substituiren. Allein da wir gefunden haben, dass die geodätische Linie immer mit der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten völlig übereinstimmt, so ist es für die Rechnung vortheilhafter, gleich vom bequemsten Ausdruck des Elements des elliptischen Sphäroïds auszugehen, und aus demselben die Gleichung der geodätischen Linie durch die Variationsrechnung zu suchen.

Wir hatten in §. 179. für das Linearelement den Ausdruck

$$ds = \sqrt{aa\cos u^2\,dt^2 + (aa\sin u^2 + bb\cos u^2)\,du^2};$$

sucht man hieraus die Variation des Integrals, indem man blos t als variabel betrachtet und setzt diese Variation Null, so wird

$$d.\frac{aa\cos u^2\,dt}{ds} = 0$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Durch Integration erhält man

$$\frac{aa\cos u^2\,dt}{ds} = c$$

wo c eine noch zu bestimmende Constante ist. Da $a\cos u\,dt$ immer kleiner als ds ist, also um so mehr $a\cos u^2\,dt < ds$, so wird auch die Constante c kleiner als a seyn, und wir wollen daher statt dieser einen Winkel 6 einführen, so dass $c = a\cos 6$; dann wird

$$a\cos u^2\,dt = ds.\cos 6.$$

n man quadrirt und statt ds seinen Werth

$$\iota \cos u^4\, dt^2 = aa \cos u^2 \cos 6^2\, dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2)\, du^2 . \cos 6^2 .$$

aus folgt

$$t^2 = \frac{(aa \sin u^2 + bb \cos u^2) \cos 6}{aa \cos u^2 (\cos u^2 - \cos 6^2}\, du^2$$

n man diesen Werth von dt^2 in dem Aus- s Linearelements ds substituirt,

$$\cos u\, du . \sqrt{\frac{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}{\cos u^2 - \cos 6^2}} .$$

Integration dieses Ausdrucks ist unter end- m nicht auszuführen. Man setze der Kürze $u = \sin 6 \sin \omega$, so erhält man

$du . \cos u = \sin 6 . \cos \omega . d\omega$

$\sin u^2 = \sin \omega^2 \sin 6^2$,

$\cos u^2 = \cos 6^2 + \cos \omega^2 \sin 6^2$

wenn man diese Werthe in vorigen Aus- etzt, so kommt

$$= d\omega \sqrt{(aa - bb) \sin \omega^2 \sin 6^2 + bb}$$

nn man statt bb, $aa(1 - \varepsilon\varepsilon)$ substituirt

$$= d\omega \sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon (1 - \sin \omega^2 \sin 6^2)}$$

wickelt man das Radical bis zur vierten Po- n s mit eingeschlossen, so ist

$$= d\omega - \tfrac{1}{2} \varepsilon\varepsilon\, d\omega (1 - \sin \omega^2 \sin 6^2) - \tfrac{1}{8} \varepsilon^4\, d\omega (1 - 2 \sin \omega^2 \sin 6^2 + \sin \omega^4 \sin 6^4).$$

nan statt der Potenzen von ω die Vielfachen inkels u, vermittelst der Gleichungen

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega$, $\sin \omega^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\omega + \frac{1}{8} \cos 4\omega$.

$$: d\omega (1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon\varepsilon (1 - \tfrac{1}{2} \sin 6^2) - \tfrac{1}{8} \varepsilon^4 (1 - 2 \sin 6^2 + \tfrac{3}{8} \sin 6^4) - d\omega \cos 2\omega . \frac{\varepsilon\varepsilon}{4} \sin 6^2 (1 + \varepsilon\varepsilon (1 - \tfrac{1}{4} \varepsilon\varepsilon \sin 6^2)) . - d\omega . \cos 4\omega . \frac{\varepsilon^4}{64} . \sin 6^4 .$$

tegrirt man diesen Ausdruck, indem zugleich $, 2\alpha - \alpha\alpha$, wo α die Abplattung bedeutet, ge-

setzt wird, und alle Potenzen von α die das Quadrat übersteigen, weggelassen werden, so erhält man

$$\frac{s}{a} = \text{Const.} + \alpha\,[1 - \alpha(1 - \tfrac{1}{4}\sin 6^2)$$
$$- \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin 6^2 (1 - \tfrac{1}{4}\sin 6^2)].$$
$$- \sin 2u \sin 6^2 \frac{\alpha}{4}[1 + \tfrac{1}{2}\alpha(3 - \tfrac{1}{4}\sin 6^2)$$
$$- \sin 4u \sin 6^2 \cdot \frac{\alpha\alpha}{64}.$$

§. 256.

Wir haben nur noch nöthig den Winkel δ zu bestimmen, welches durch Aufsuchung der endlichen Gleichung der geodätischen Linie geschieht. Zu diesem Ende müssen wir die Gleichung zwischen dt und du §. 255. vornehmen; sie ist

$$dt = \frac{du \cos\delta}{a \cos u} \cdot \sqrt{\frac{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}{\cos u^2 - \cos\delta^2}}$$

oder wenn man an die Stelle von bb, $aa(1-\alpha)$ setzt

$$dt = \frac{\cos\delta\, du}{\cos u} \sqrt{\frac{1 - \alpha\alpha \cos u^2}{\cos u^2 - \cos\delta^2}}.$$

Man betrachte zuerst das Differential

$$dt = \frac{\cos\delta\, du}{\cos u \sqrt{\cos u^2 - \cos\delta^2}},$$

welches wie man sieht, aus dem Allgemeinen dadurch gebildet wird, dass $\alpha = 0$ genommen ist, und da dieses der Fall bei einer Kugel seyn muss, so erhalten wir durch Integration dieses Ausdrucks die Gleichung für die geodätische Linie, wenn die Erde als Kugel betrachtet wird. Um obiges Differential zu integriren, hat man

$$\frac{du}{\cos u \sqrt{\cos u^2 - \cos\delta^2}} = \frac{du}{\cos u^2 \sqrt{1 - \cos\delta^2 - \cos\delta^2 tg\, u^2}}$$
$$= \frac{d.\, tang\, u}{\sqrt{\sin\delta^2 - \cos\delta^2\, tg\, u^2}}$$

also auch

$$dt = \frac{d.\ cot\,6.\ tg\,u}{\sqrt{1 - cot\,6^2\ tg\,u^2}}$$

und integrirt $t = C + Arc\ sin(= (cot\,6\ tg\,u))$, wo C eine arbiträre Constante ist. Man setze daher um das allgemeine Differential leichter integriren zu können, $cot\,6\ tg\,u = sin\,\psi$, so wird

$$cos\,u^2 = \frac{cot\,6^2}{cot\,6^2 + sin\,\psi^2}.$$

und man erhält den vollständigen Werth von

$dt = d\psi \sqrt{1 - ss\,\frac{cot\,6^2}{cot\,6^2 + sin\,\psi^2}}$. Entwickelt man die Wurzelgrösse durch den binomischen Lehrsatz, so wird

$$dt = d\psi - \tfrac{1}{2}ss.\frac{cot\,6^2\,d\psi}{cot\,6^2 + sin\,\psi^2} - \tfrac{1}{2}s^4\,\frac{cot\,6^4\,d\psi}{(cot\,6^2 + sin\,\psi^2)^2}$$

so dass wir also die Integrale der beiden Differentiale

$$\frac{d\psi}{cot\,6^2 + sin\,\psi^2},\quad \frac{d\psi}{(cot\,6^2 + sin\,\psi^2)^2}$$

zu suchen haben

Es ist nun indem wir Zähler und Nenner durch $cos\,\psi^2$ dividiren

$$\frac{d\psi}{cot\,6^2 + sin\,\psi^2} = \frac{\frac{d\psi}{cos\,\psi^2}}{cot\,6^2 + \frac{tang\,\psi^2}{sin\,6^2}}$$

$$= tang\,6.\ sin\,6\ \frac{d.\ \frac{tang\,\psi}{cos\,6}}{1 + \frac{tang\,\psi^2}{cos\,6^2}}$$

folglich auch

$$\int \frac{d\psi}{cot\,6^2 + sin\,\psi^2} = tang\,6.\ sin\,6.\ Arc\ tang\left(= \frac{tang\ \psi}{cos\ 6}\right).$$

wodurch das Integral des ersten Differentials gefunden ist. Um das Integral des zweiten zu erhalten, braucht man gar nicht zu integriren, sondern blos das Integral des ersten zu differentiiren; denn be-

zeichnet man das Integral des ersten durch P, s kann man P auch als Function von θ betrachten und ψ als constant annehmen; man hat dann

$$\int \frac{d\psi}{\cot\theta^2 + \sin\psi^2} = P.$$

und wenn man diesen Ausdruck nach θ differentiirt

$$2\frac{d\theta}{\sin\theta^3}\cot\theta \int \frac{d\psi}{(\cot\theta^2 + \sin\psi^2)^2} = dP$$

wo sich das Zeichen der Integration blos auf die veränderliche Grösse ψ bezieht. Bezeichnet man daher das Integral des zweiten Differentials durch Q, so ist

$$2\frac{\cot\theta}{\sin\theta^3}\, Q = dP.$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dP}{d\theta}\right) tang\,\theta\, \sin\theta^4.$$

Nun war aber gefunden, dass

$$P = tang\,\theta\, \sin\theta\, Arc\, tang\left(= \frac{tang\,\psi}{\cos\theta}\right)$$

also wenn man die Differentiation rücksichtlich der Grösse θ ausführt

$$\left(\frac{dP}{d\theta}\right) = tang\,\theta \frac{1+\cos\theta^2}{\cos\theta} Arc\, tang\left(= \frac{tang\,\psi}{\cos\theta}\right)$$

$$+ tang\,\theta\, \sin\theta^2 . \frac{tang\,\psi}{\cos\theta^2 + tang\,\theta^2}.$$

Multiplicirt man dies noch mit $\frac{1}{2} tang\,\theta\, \sin\theta^2$, so kommt

$$Q = \tfrac{1}{2} tang\,\theta^2\, \sin\theta\,(1+\cos\theta^2).\, Arc\left(tang\left(= \frac{tang\,\psi}{\cos\theta}\right)\right.$$

$$+ \tfrac{1}{2} tang\,\theta^2\, \sin\theta^4 . \frac{tang\,\psi}{\cos\theta^2 + tang\,\psi^2}.$$

Nun war aber

$$t = \psi - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon \cot\theta^2 . P - \tfrac{1}{4}\varepsilon^4 \cot\theta^4 Q + C.$$

folglich wenn man diese Werthe von P und Q hierin substituirt

$$\varepsilon - C = \psi - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon \cos\theta\, Arc\, tang\left(= \frac{tang\,\psi}{\cos\theta}\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos 6\,(1+\cos 6^2)\,Arc\,tang(=\frac{tang\,\psi}{\cos 6})$$

$$-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \sin 2\delta^2.\ \frac{tang\,\psi}{\cos 6^2+tang\,\psi^2}.$$

§. 257.

In der Ausübung sind die zu berechnenden Entfernungen gewöhnlich, rücksichtlich der Grösse der Erde, von denselben Dimensionen als die Abplattung, so dass wir der leichtern Rechnung wegen nur ihre erste Potenz oder das Quadrat von ε beibehalten wollen; dann wird

$$t - C = \psi - \alpha \cos 6.\ Arc\,tang(=\frac{tang\,\psi}{\cos 6}).$$

Die Grösse t ist hierbei bekanntlich die Länge des Orts, und ψ hängt blos von der geographischen Breite und einer constanten Grösse ab. Es sey nun die geographische Länge des Anfangspunktes t', der diesem entsprechende Werth von ψ, ψ', so wird

$$t' - C = \psi' - \alpha \cos 6\ Arc\ log = \frac{tang\,\psi'}{\cos 6}.$$

Zieht man diese Gleichung von der obern ab, und bemerkt, dass

$$Arc\,tang(=\frac{tang\,\psi}{\cos 6}) - Arc\,tang = (\frac{tang\,\psi'}{\cos 6})$$

$$= Arc\,tang(=\frac{\cos 6\,(tang\,\psi - tang\,\psi')}{\cos 6^2 + tang\,\psi\ tang\,\psi'})$$

so kommt

$$t - t' = \psi - \psi' - \alpha \cos 6.\ Arc\,tg[=\frac{\cos 6(tg\,\psi - tg\,\psi')}{\cos 6^2 + tg\,\psi\ tg\,\psi'}].$$

Setzt man die Länge des letzten Punktes der Linie $= t''$, und den entsprechenden Werth von $\psi + \psi''$, so wird auch

$$t'' - t' = \psi'' - \psi' - \alpha \cos 6\ Arc\,tg[=\frac{\cos 6(tg\,\psi'' - tg\,\psi')}{\cos 6^2 + tg\,\psi''\,tg\,\psi'}]$$

und aus dieser Gleichung muss nun 6 bestimmt werden.

$$\cos A \sin(t''-t') + \sin A \sin u' \cos(t''-t') + \alpha\mu(\cos A \cos(t''-t') - \sin A \sin u' \sin(t''-t')) = \frac{\sin A \cos u' \sin u''(\cos A^2 + \sin A^2 \sin u'^2)}{\cos u''(1-\sin A^2 \cos u'^2)},$$

wo die in $\alpha\alpha$ multiplicirten Glieder weggelassen sind. Man sieht nun aber leicht, dass

$$\cos A^2 + \sin A^2 \sin u'^2 = 1 - \sin A^2 \cos u'^2$$

ist, also wird, wenn man die ganze Gleichung noch durch $\sin A$ dividirt,

$$\cot A \sin(t''-t') + \sin u' \cos(t''-t') + \alpha\mu[\cot A \cos(t''-t') - \sin u' \sin(t''-t')] = \cos u' \operatorname{tang} u''.$$

Hieraus erhält man

$$\cot A = \frac{\cos u' \operatorname{tang} u'' - \sin u' \cos(t''-t') + \alpha\mu \sin u' \sin(t''-t')}{\sin(t''-t') + \alpha\mu \cos(t''-t')}$$

$$= \frac{\cos u' \operatorname{tang} u'' - \sin u' \cos(t''-t')}{\sin(t''-t')} + \frac{\sin u' - \cos u' \operatorname{tang} u'' \cos(t''-t')}{\sin(t''-t')^2}\alpha\mu.$$

Wenn der Unterschied $t''-t'$ nur gering ist, so wird dieser Ausdruck zur Berechnung von A etwas unbequem seyn; man setze daher lieber statt $\cos(t''-t')$ die Entwickelung des Radicals

$$\sqrt{[1-\sin(t''-t')^2]} = 1 - \tfrac{1}{2}\sin(t''-t')^2 - \tfrac{1}{8}\sin(t''-t')^4,$$ wodurch

$$\cos u'' \cot A = \frac{\sin(u''-u')}{\sin(t''-t')} + \tfrac{1}{2}\sin u' \sin(t''-t') + \tfrac{1}{8}\sin(t''-t')^2 \sin u' - \frac{\alpha\mu}{\sin(t''-t')}\left[\frac{\sin(u''-u')}{\sin(t''-t')} - \tfrac{1}{2}\cos u' \sin u'' \sin(t''-t') - \tfrac{1}{8}\cos u' \sin u'' \sin(t''-t')^2\right].$$

Wir haben nun noch die Grösse μ auszudrücken; diese ist

$$\mu = \cos b.\ Arc\ tang = \frac{\cos b\,(\operatorname{tang}\psi'' - \operatorname{tang}\psi')}{\cos b^2 + \operatorname{tang}\psi''.\operatorname{tang}\psi'}.$$

Da nun ψ'' und ψ' nur wenig von einander verschieden sind, so wird die Tangente, von welcher der Bogen genommen werden soll, nur klein seyn,

und man kann beide mit einander vertauschen. Ferner wird μ in α multiplicirt, und da wir alle höhern Potenzen von α vernachlässigen, so werden wir in der Berechnung der Grösse μ, $\alpha = 0$ annehmen können. Es wird also

$$\mu = \frac{\cos 6^2 \,(\tang \psi'' - \tang \psi')}{\cos 6^2 + \tang \psi' \tang \psi''}.$$

oder wenn wir statt $\cos 6$ seinen Werth $\sin A \cos u'$ setzen

$$\mu = \frac{\sin A^2 \cos u'^2 \,(\tang \psi'' - \tang \psi')}{\sin A^2 \cos u'^2 + \tang \psi' \tang \psi''}.$$

Es ist aber auch aus den für $\sin \psi'$, $\cos \psi'$, $\sin \psi''$, $\cos \psi''$ gefundenen Formeln

$$tg\,\psi'' - tg\,\psi' = \frac{\sin(\psi'' - \psi')}{\cos \psi''\, \cos \psi'}$$

$$= \frac{(1 - \sin A^2 \cos u'^2) \cos u''}{\cos A \sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \cos u'^2}} . \sin(t'' - t')$$

$$\tang \psi' . \tang \psi'' = \frac{\sin A^2 \sin u' \cos u' \sin u''}{\cos A \sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \cos u'^2}}$$

folglich

$$\mu = (1 - \sin A^2 \cos u'^2) \frac{\cos u' \cos u'' \sin(t'' - t')}{\sin u' \sin u'' + R \cos A \cos u'},$$

wo $R = \sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \cos u'^2}$. In diesem Ausdruck kommt zwar noch A selbst vor, allein man wendet ohne weiteres den Werth an, welcher aus der ersten Formel, die $\cos u''$ $\cot A$ ausdrückt, mit Hinweglassung des in α multiplicirten Gliedes, folgte.

§. 259.

Geht man bei der Berechnung der Länge des Bogens ebenfalls blos bis zur ersten Potenz der Abplattung α fort, so giebt die Formel (§. 255.)

$$\frac{s}{a} = Const. + \omega(1 - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \sin 6^2) - \sin 2\omega . \sin 6^2 \frac{\alpha}{4}.$$

Um die Constante wegzuschaffen, seyen ω' und ω'' die Werthe von ω für den Anfangspunkt und den Endpunkt des Bogens, so wird

$$\frac{s}{a} = (\omega'' - \omega')\,(1 - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \sin 6^2)$$
$$- \sin(\omega'' - \omega')\,\cos(\omega'' + \omega')\,\sin 6^2\,\frac{\alpha}{2}.$$

und man hat, da $\sin u = \sin 6 . \sin \omega$,

$$\sin \omega' = \frac{\sin u'}{\sin 6}, \quad \sin \omega'' = \frac{\sin u''}{\sin 6}.$$

wodurch ω', ω'' bestimmt sind. Die Winkel u', u'' selbst müssen aus den beiden Polhöhen v', v'', vermittelst der Formeln, $a \,tang\, u' = b \,tang\, v'$, $a \,tang\, u'' = b \,tang\, v''$, oder

$$tang\, u' = (1 - \alpha)\, tang\, v'$$
$$tang\, u'' = (1 - \alpha)\, tang\, v''.$$

berechnet werden.

§. 260.

Die ganze Rechnung wird daher folgenden Gang nehmen müssen. Es seyen t', t'', v', v'' die geographischen Längen und Breiten der beiden Oerter, deren Entfernung gesucht wird, so berechne man

$$tang\, u' = (1 - \alpha)\, tang\, v',$$
$$tang\, u'' = (1 - \alpha)\, tang\, v''$$
$$\tfrac{1}{2} \sin(t'' - t')\,[1 + \tfrac{1}{2} \sin(t'' - t')^2] = E.$$
$$\cot A' = \frac{\sin(u'' - u')}{\cos u''.\, \sin(t'' - t')} + \frac{\sin u'}{\cos u''}.\, E$$
$$\sin A'.\, \cos u' = \sin g., \quad \frac{\sin g}{\cos u''} = \sin h.$$
$$\frac{\cos g^2.\, \cos u'.}{\sin u' \sin u'' + \cos h \,sos\, A'.\, \cos u' \cos u''} = F$$
$$\frac{\sin u' + \cos u' \sin u''}{\cos u''} = n.$$
$$\cot A = \cot A' - \alpha F \cos u'' \,(\cot A' - nE).$$
$$\cos 6 = \sin A.\, \cos u'.$$
$$\sin \omega' = \frac{\sin u'}{\sin 6}, \quad \sin \omega'' = \frac{\sin u''}{\sin 6}.$$
$$\omega'' - \omega' = \Omega$$
$$\frac{s}{a} = \Omega(1 - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \sin 6^2) - \sin \Omega \cos(\omega' + \omega'') \sin 6^2 \frac{\alpha}{2}$$

§. 261.

Wir wollen nun noch als Beispiel der Anwendung dieser Formeln, einen Fall in Zahlen berechnen. Der Anfangspunkt der Linie sey Mannheim, der Endpunkt derselben Göttingen. Man hat hierbei

die geogr. Breite von Mannheim $= 49° 29' 18'' = v'$
— — — — Göttingen $= 51° 31' 48'' = v''$
— — Länge von Mannheim $= 26° 7' 45'' = t'$
— — — — Göttingen $= 27° 36' 15'' = t''$

$t'' - t' = 1° 28' 30''$
$\log \tan v' = 0.0683221.$
$\log (1 - \alpha) = 9.9985418.$
$0.0668639 = \tan u'.$
$u' = 49° 23' 35''90$
$\log \tan v'' = 0.0998616.$
$\log (1 - \alpha) = 9.9985418.$
$0.0984034 = \log \tan u''$
$u'' = 51° 26' 10''56$
$u'' - u' = 2° 2' 34''66.$
$\log \sin(t'' - t') = 8.4106214.$
$2 \log \sin(t'' - t') = 6.8212428.$
$\log 4 = 0.6020600.$
$6.2191828 = \log \frac{1}{4} \sin(t'' - t')^2$

Hierzu die Zahl 0,00016564.

$\log(1 + \frac{1}{4} \sin(t'' - t)^2) = 0.0000718.$
$\sin(t'' - t') = 8.4106214$
$\log \frac{1}{k} = 9.6989700$
$8.1096632 = \log E$
$\log \sin u' = 9.8803536.$
Compl. $\log \sin u'' = 0.1068404$
$8.0968572 = \log \frac{E \sin u'}{\sin u''}$

$\frac{E \sin u'}{\sin u''} = 0,0124985.$
$\log \sin(u'' - u') = 8.5520458.$
$\log \sin(t'' - t') = 8.4106214$
0.1414244

$$
\begin{aligned}
& 0.1414244 \\
\log \cos u'' &= 9.7947429. \\
& \overline{0.3466815.} \\
\text{Hierzu die Zahl} &= 2{,}2216797. \\
\frac{E \sin u'}{\sin u''} &= 0{,}0124985 \\
& \overline{2\text{[illegible]}341782} = \cot A'. \\
\log \cot A' &= 0\text{[illegible]}491179. \\
A' &= 2\text{[illegible]}\ 6'\ 46''42.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log \sin A' &= 9.6112302. \\
\log \cos u' &= 9.8134893. \\
& \overline{9.4247195} = \log \sin g. \\
\log \cos u'' &= 9.7947429 \\
& \overline{9.6299766} = \log \sin h. \\
g &= 15^\circ\ 25'\ 13''73 \\
h &= 25^\circ\ 14'\ 57''22 \\
\log \cos h &= 9.9563898. \\
\log \cos A' &= 9.9603481 \\
\log \cos u' &= 9.8134893 \\
\log \cos u'' &= 9.7947429 \\
& \overline{9.5249701.} \\
\text{die Zahl} &= 0{,}3349424. \\
\log \sin u' &= 9.8803536 \\
\log \sin u'' &= 9.8931596 \\
& \overline{9.7735132.} \\
\text{die Zahl} &= 0{,}5936264. \\
&+ 0{,}3349424 \\
& \overline{0{,}9285688} \\
\text{zugehör. Log.} &= 9.9678142 \\
\log \cos g^2 &= 9.9681544 \\
\log \cos u' &= 9.8134893 \\
& \overline{9.7816437} \\
& 9.9678142 \\
& \overline{9.8138295} = \log F. \\
\log \cos u' &= 9.8134893 \\
\log \sin u'' &= 9.8935196 \\
& \overline{9.7070089} = \log \cos u'.\ \sin u'
\end{aligned}
$$

$\cos u' \sin u'' = 0{,}5093142$
$\sin u' = 0{,}7591953$
$1{,}2685365 = \cos u' \sin u'' + \sin u'.$
Zogehör. Logar. $= 0.1033029.$
$\cos u'' = 9.7947429$
$0.3085600 = \log n.$
$\log E = 8.1096632$
$8.4182242 = \log nE.$
$nE = 0{,}0261953.$
$\cot A' = 2{,}2341782$
$2{,}2079829 = \cot A' - nE$
$\log (\cot A' - nE) = 0.3439958.$
$\log \cos u'' = 9.7947429.$
$\log F = 9.8138295.$
$\log \alpha = 7.5253196.$
$7.4778878.$
Hierzu die Zahl $= 0{,}0030053.$
$\cot A' = 2{,}2341782$
$2{,}2311729 = \cot A'$
$\log \cot A = 0.3485333$
$A = 24° 8' 30''00.$
$\log \sin A = 9.6117171$
$\log \cos u' = 9.8134853.$
$9.4252064 = \log \cos 6.$
$6 = 74° 33' 42''45.$
$\log \sin u' = 9.8803536$
$\log \sin 6 = 9.9840401$
$9.8963135 = \log \sin \omega'.$
$\omega' = 51° 57' 47' 15''.$
$\log \sin u'' = 9.8935196$
$\log \sin 6 = 9.9840401$
$9.9094795 = \log \sin \omega''$
$\omega'' = 54° 16' 40''00$
$\omega'' - \omega' = \Omega = 2° 18' 52''85$
$= 0{,}040398797$
$\omega'' + \omega' = 106° 14' 27''15.$

etzt man den in Graden ausgedrückten Meri-
nterschied $= M$, so wird die Proportion

$$\pi : t'' - t' = 180° : M$$

inden müssen, also $M = \frac{t'' - t'}{\pi} . 180°$; multi-
man dies noch mit 3600, so erhält man

$$\frac{t'' - t'}{\pi} . 180. 3600 \text{ Bogensecunden},$$

da der gleichgeltende, in Zeitsecunden ausge-
ete Meridianunterschied T, in Bogensecunden
beträgt, so wird

$$\frac{t'' - t'}{\pi} . 180. 3600 = 15\,T.$$

auch

$$t'' - t' = \frac{15\,T.\,\pi}{180. 3600}.$$

erner war (§. 225.), wenn f die Länge des mitt-
Meridiangrades bedeutet

$$90f = \tfrac{1}{2}\pi a\,(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha).$$

auch

$$a = \frac{180f}{\pi} . \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{16}\alpha\alpha},$$

hieraus ergiebt sich

$$z\,(t'' - t') = \frac{T.f}{240} . \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{16}\alpha\alpha}$$

$$r = \frac{T \cos u}{240} . \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{16}\alpha\alpha}$$

$$r = \frac{240\,\sigma}{f \cos u}\,(1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha).$$

r in Toisen ausgedrückt seyn muss, da f in dem-
n Maass angegeben ist.

Zur Berechnung der hierbei vorkommenden Con-
e hat man

$1 =$		1,0000000
$-\frac{1}{2}\alpha =$	$-$	0,0016749
		0,9983251.
$+\frac{1}{16}\alpha\alpha =$	$+$	0,0000003.
		$0,9983254 = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{16}\alpha\alpha.$

Marennes	bis Milano	2470″865	801739″900
—	— Padua	3116,248	1010996, 176.

Berechnet man nach voriger Formel die Meridianunterschiede aus den gegebenen Linearentfernungen, so erhält man

Marennes	bis St. Preuil	229″422.	+ 0″432
—	— Sauvagnac	612″006.	— 0″078
—	— Jsson	1023″461.	— 0″014
—	— Geneve	1742″143.	+ 0″848
—	— Milano	2472″018.	+ 1″153
—	— Padua	3117″221.	+ 0″973.

§. 265.

Man kann nun untersuchen, welcher Fehler an dem Orte rücksichtlich der Zeitbestimmung begangen seyn wird, damit die aus den als richtig angenommenen terretrischen Messungen, nach der früher bestimmten Gestalt der Erde, berechneten Meridianifferenzen am genauesten mit der vorhin angegebenen Gestalt der Erde übereinstimmen. Es sey daher ie wahrscheinliche

Länge	von Marennes	=	0″000 + α
—	— St. Preuil	=	228,990 + β
—	— Sauvagnac	=	612,084 + γ
—	— Jsson	=	1023,475 + δ
—	— Geneve	=	1741,295 + ε
—	— Milano	=	2470,865 + ζ
—	— Padua	=	3116,248 + η

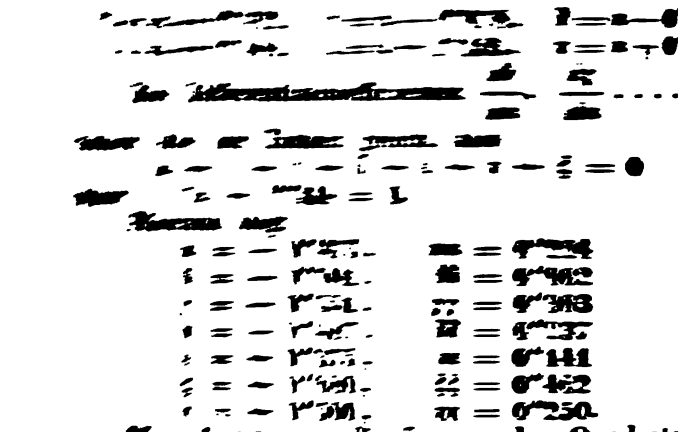
werden die Fehler α, β, γ .... so zu bestimmen n, dass die Summe der Quadrate ein Minimum ird. Man hat also die Gleichung

$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + \varepsilon\varepsilon + \zeta\zeta + \eta\eta = \text{Minim.}$

er wenn man β, γ, δ .... als Functionen von nsieht

$$\alpha + \beta\frac{d\beta}{d\alpha} + \gamma\frac{d\gamma}{d\alpha} + \delta\frac{d\delta}{d\alpha} + \varepsilon\frac{d\varepsilon}{d\alpha} + \zeta\frac{d\zeta}{d\alpha} + \eta\frac{d\eta}{d\alpha} = 0.$$

Aus der Vergleichung der berechneten Meridianrenzen mit den beobachteten, folgt aber



Man findet nun die Summe der Quadrate
Fehler = 1″.337; dividirt man diese Summe durch
und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel
ergiebt sich

mittlerer Fehler = 0″.4809.

Man macht in Bogensecunden 7″.213, welches
Mal kleiner als der mittlere Fehler bei
Azimuthalgrundmessungen ist.

§. 266.

Der Ausdruck für den Meridianunterschied

ehmen, wenn man der Abplattung sowohl als dem tlern Grade des Erdmeridians grössere Werthe egt. Unsere definitiven Werthe dieser beiden issen gaben den Meridianunterschied zwischen Manes und Padua zu gross an. Wir wollen daher en, welche Werthe den Meridiandifferenzen sich eben, indem wir die grösstmöglichsten Werthe Abplattung und des Meridiangrades zum Grunde n. Wir haben dann

$$\text{die Abplattung} = \frac{1}{287{,}6},$$

en mittlern Meridiangrad = 57013 Toisen
man findet nach den Rechnungen §. 263 und 264.

$$\begin{aligned} 1 &= 1{,}0000000 \\ -\tfrac{1}{2}\alpha &= 0{,}0017385 \\ &\quad 0{,}9982615. \\ +\tfrac{1}{16}\alpha\alpha &= 0{,}0000004 \\ &\quad 0{,}9982619 = 1-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{16}\alpha\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log &= 9.9992445 \\ log\,240 &= 2.3802112 \\ C.\,log f &= 5.2440261 \\ &\quad 7.6234818 \\ log\,tang\,v &= 0.0109161 \\ log(1-\alpha) &= 9.9984873 \\ &\quad 0.0094034 = log\,tang\,u \end{aligned}$$

$$u = 45^{\circ}\ 37'\ 12''87.$$

$$\begin{aligned} log\,\sigma &= 5.7149295 \\ &+ 7.6234818 \\ &\quad 3.3384113 \\ log\,cos\,u &= 9.8447323 \\ &\quad 3.4936790 \end{aligned}$$

$$T = 3116''585.$$

Bei den vorherigen Annahmen der Abplattung des mittlern Meridiangrades, war $T = 3117{,}221$ nden worden, folglich müssen alle früher berechn Meridiandifferenzen um $\frac{1}{4900}$ vermindert wer-

Man erhält dadurch

Morennes	bis St. Preuil	229″376	+ 0″386
—	— Sauvagnac	611″381	— 0″203
—	— Jseon	1023″253	— 0″222
—	— Geneve	1741″788	+ 0″493
—	— Milano	2471″513	+ 0″648
—	— Padua	3116″585	+ 0″337.

Zur Bestimmung der Fehler α, β, γ . . . erh
man die Gleichungen

$\beta = \alpha + 0''386$, $\gamma = \alpha - 0''203$, $\delta = \alpha - 0''2$
$\varepsilon = \alpha + 0''493$, $\zeta = \alpha + 0''648$, $\eta = \alpha + 0''3$

und hieraus

$\alpha = -\ 0''205$,	$\alpha\alpha = 0{,}042$
$\beta = +\ 0''181$,	$\beta\beta = 0{,}033$
$\gamma = -\ 0''406$,	$\gamma\gamma = 0{,}166$
$\delta = -\ 0''427$,	$\delta\delta = 0{,}202$
$\varepsilon = +\ 0''288$,	$\varepsilon\varepsilon = 0{,}083$
$\zeta = +\ 0''443$,	$\zeta\zeta = 0{,}196$
$\eta = +\ 0''132$,	$\eta\eta = 0{,}017$

folglich die Summe der Quadrate = 0″729, und d
mittlern Fehler = 0″3249.

§. 267.

Man sieht aus allen, in diesem Abschnitt bish
angestellten Rechnungen, dass die Voraussetzung, di
Erde sey ein elliptisches Sphäroïd, mit den Messun
gen die man theils wegen der grössern Geübtheit der

ausser den Messungen der Längengrade
tengrade noch eine dritte Art, die Ab-
ch Beobachtungen zu finden, nämlich
obachtung der Anzahl der Schwingungen,
del an den verschiedenen Oertern der
r bestimmten Zeit macht. Die hierbei
Methode wollen wir aber bis an einen
aufsparen, und zuerst sehen, was uns
über die Gestalt der Erde zu lehren im

sche Untersuchungen über die Gestalt der Erde.

§. 268.

lmässige Gestalt, welche wir bei dem
den, lässt uns schliessen, dass Anfangs
aus welcher die Erde besteht, nicht in
rten Zustande gewesen seyn kann, weil
örper durch die Wirkung von Kräften
m gar nicht oder nur wenig geändert
anfängliche Zustand der Erde muss also
eyn, dass die kleinsten Theile ihrer Ma-
urch die geringsten Kräfte verschieben
ie unter der Wirkung derselben, die
eichgewichts angenommen hatten, und
er zu der Voraussetzung genöthigt, die
h in einem tropfbar-flüssigen oder li-
nde befunden, der durch Abnahme der
erst späterhin in eine Erstarrung über-

Ob dieser liquide Zustand gleich der
n sey, oder ob sich noch vorher die
gasförmigen Zustande befunden habe,
ei nicht weiter in Betracht, da allen
rungen zufolge jedes Gas erst tropfbar-
he es erstarren kann, so dass wir also
der ersten Erstarrung vorhergehenden
quide Flüssigkeit zu berücksichtigen

§ 269.

Man hat über den frühern Zustand der Er[illegible] [illegible] Hypothesen aufgestellt, die aber nicht [illegible] [illegible] in den physischen Th[illegible] der Geographie gehören: wir begnügen uns mit d[illegible] Auflösung der Aufgabe. Es ist eine liquide Flü[illegible] [illegible] gegeben, die eine Drehung angenom[illegible] [illegible] hat, und deren einzelne Theilche[illegible] einer gegenseitigen Anziehung unterworfe[illegible] sind, die sich direct wie die Masse und un[illegible] gekehrt wie das Quadrat der Entfernun[illegible] zweier auf einander wirkender Theilche[illegible] verhält, man sucht die Gestalt welche di[illegible] Oberfläche der Flüssigkeit annehmen wir[illegible] nachdem sie unter der Wirkung diese[illegible] Kräfte ins Gleichgewicht gekommen is[illegible] Die Auflösung dieser Aufgabe hat seit Newtons Zei[illegible] ten die grössten Mathematiker beschäftigt, und [illegible] ist zwar gelungen, dieselbe näherungsweise aufzulö[illegible] sen, allein mit vollständiger Genauigkeit hat dies bi[illegible] jetzt noch nicht geschehen können.

§ 270.

Dass alle Materie eine Anziehung gegen einan[illegible] der ausübt, die der Masse direct und dem Quadr[illegible] der Entfernung beider sich anziehenden Massen [illegible]

, als es jetzt wirklich der Fall ist, und
mischen Beobachtungen können nur dazu
e bei diesen Bewegungen vorkommenden
Grössen immer genauer in Zahlen aus-

§. 271.

fte nicht überflüssig seyn, über die An-
Materie einige allgemeine Betrachtungen
igen. Wenn wir blos die Erscheinungen
gen, welche die Verbindungen der ver-
Materien auf der Erde zeigen, so ist die
ner gegenseitigen Anziehung der Materie
:h nothwendig, um diese Erscheinungen
ı erklären, und nicht blos die sogenannten
Materien, deren Anziehung durch die
der Cohäsion, Capillarität, chemische
haft u. s. w. angezeigt wird, sondern auch
rablen Materien als Licht, Wärme, Elec-
agnetismus, gehen sowohl unter einander
it der ponderablen Materie, sehr enge
:n ein. Doch ist zu bemerken, dass diese
: gegenseitiger Nähe der sich anziehenden
:ehenden Erscheinungen, nicht wohl durch
wton angegebene Attractionsgesetz zu er-
indem dieselben eine viel stärkere Kraft
ıls aus der dem Quadrate der Entfernung
roportionalen Anziehungskraft hervorgeht.
ıher einen Unterschied zwischen der in
tfernungen wirkenden Attraction und der
hrung wirkenden gemacht, und erstere
ne Anziehung, letztere die Molecularan-
ıannt.

§. 272.

ehr wohl möglich, dass die Molecularan-
l die allgemeine Anziehung im Grunde
:selbe Kraft sind, nur dass bei grössern
ı alle Glieder der Function, welche das
ken soll, bis auf das eine, dem Quadrat
umgekehrt proportionale, zu klein-

ıtion unserer analytischen Formeln betrach-

§. 273.

wir bei den Untersuchungen über die Gestalt
› blos die in die Entfernung wirkende An-
nach dem von Newton angegebenen Gesetz
chtigen werden, so mag dieses Wenige, über
eculærkraft gesagte, hier hinreichend seyn,
wollen uns jetzt zur Betrachtung der Kraft
die bei der Bewegung eines Punktes in ei-
eise wirksam wird. Diese Kraft wird die
ugalkraft oder Schwungkraft genannt.
ich ein Körper um eine Axe dreht, so be-
jeder Theil desselben eine Kreislinie, deren
nkt in der Drehungsaxe liegt, und deren
ser der Entfernung des Theils von dieser
:h ist. Dieser materielle Punkt wird daher
en, auf einem Kreise sich zu bewegen, in-
nit dem übrigen Körper verbunden ist, da
rdem nach der Berührungslinie des Kreises,
em er sich bewegen muss, fortfliegen würde,
kann fragen wie gross die Kraft sey, wel-
Stande ist ihn in dieser Lage zu erhalten.
nleuchtend, dass man der Kraft eine Rich-
legen muss, die mit der Normale, also mit
längerung des Halbmessers zusammenfällt;
nn man auch eine andere Richtung annähme,
e man die Kraft wieder in zwei andere zer-
von denen die eine nach der Normale, die
ıach der Berührungslinie des Kreises wirken
die letztere trägt aber nichts dazu bei den
uf dem Kreise zu erhalten, sondern wird
ewegung nur beschleunigen oder verzögern.
ollen diese der Centrifugalkraft entgegenge-
raft durch R bezeichnen, und durch den
nkt des Kreises zwei sich rechtwinklicht
nde Axen legen, so wird die nach der Axe
legte Kraft durch $\frac{Rx}{a}$, die nach der Axe der
Kraft durch $\frac{Ry}{a}$ ausgedrückt, wo a den

ausgedrückt, wo f die constante Grösse $\frac{4\pi\pi}{TT}$ angi

Diese giebt die Seitenkräfte

fx nach der Axe der x
fy nach der Axe der y
0 nach der Axe der z.

Bezeichnet man nun die zusammengenomm Kräfte die auf jeden Punkt der flüssigen Masse ken, nach den drei Axen durch X, Y, Z, und denkt, dass die Centrifugalkraft der Anziehung gegenwirkt, so hat man

$$\frac{Vx}{r} - fx = X$$

$$\frac{Vy}{r} - fy = Y$$

$$\frac{Vz}{r} = Z.$$

Setzt man die hieraus entstehende Mittelkraf

$$\sqrt{XX + YY + ZZ} = U$$

und bezeichnet die Winkel, welche die Mittelk mit den drei Axen macht, durch ξ, η, ζ, so man bekanntlich

$$X = U\cos\xi, \quad Y = U\cos\eta, \quad Z = U\cos\zeta.$$

Nun besteht aber die Haupteigenschaft der F sigkeiten darin, dass ihre Theile durch die gerin Kraft verschoben werden können; soll daher Oberfläche der Flüssigkeit unter der Wirkung angegebenen Kräfte in Ruhe bleiben oder im Gle gewicht seyn, so muss die Mittelkrat an allen S len senkrecht auf die Oberfläche gerichtet seyn. D wäre dieselbe nicht senkrecht gegen die Oberfl gerichtet, so könnte man sie in zwei andere ze gen, von denen die eine nach der Normale geric ist, die andere in der Berührungsebene an der O fläche liegt, und die letztere würde eine Versc bung der Theile hervorbringen müssen. Da nun aber die Gestalt der Flüssigkeit suchen, w sie sich im Zustande des Gleichgewichts befindet. muss die nach der Berührungsebene zerlegte K Null seyn, folglich wird die Mittelkraft mit der N male selbst zusammenfallen müssen.

Es werden daher die drei Winkel ξ, η, ζ, die-
nigen seyn, welche die Normale mit den drei Axen
er x, y, z bildet.

§. 275.

Nun werde die Differentialgleichung der Ober-
läche der Flüssigkeit durch die Relation

$$dz = pdx + qdy$$

usgedrückt, so sind bekanntlich die Gleichungen der
Normale an irgend einem Punkte derselben

$$(\zeta - z)\, p + (\xi - x) = 0$$
$$(\zeta - z)\, q + (\eta - y) = 0$$

nd man findet leicht, dass die Cosinus der Winkel,
welche die Normale mit den drei Axen bildet, fol-
endermassen ausgedrückt worden

$$\cos\xi . \sqrt{1 + pp + qq} = + p.$$
$$\cos\eta . \sqrt{1 + pp + qq} = + q.$$
$$\cos\zeta . \sqrt{1 + pp + qq} = - 1.$$

Es ist aber vermöge der Gleichung der Ober-
läche $pdx + qdy - dz = 0$, also auch

$$\cos\xi . dx + \cos\eta . dy + \cos\zeta . dz = 0.$$

etzt man hierin aus vorigem §. statt der drei Co-
inus, ihre Werthe durch die Kräfte ausgedrückt,
o kommt

$$V . \frac{xdx + ydy + zdz}{r} - f(xdx + ydy) = 0$$

elches die verlangte Differentialgleichung für die
berfläche der Flüssigkeit ist. Um diese Gleichung
n integriren, muss man für V eine bestimmte Func-
ion der Entfernung r annehmen, indem jede mögliche
nziehung blos von der Entfernung abhängen kann,
nd wir wollen ganz einfach $V = mr^n$ setzen, wo
m und n ein paar constante Grössen sind. Da ferner

$$xdx + ydy + zdz = rdr.$$

) erhält man auch

$$mr^n dr - f(xdx + ydy).$$

nd diese Gleichung giebt, wenn man dieselbe integrirt

$$c + \frac{m}{n+1} . r^{n+1} - \tfrac{1}{2} f(xx + yy) = 0$$

gend einem der Elemente $= r$, so hat man bekanntlich

$$rr = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Die ganze Anziehung eines Elements auf den Punkt wird nun durch $\frac{dM}{rr}$ nach dem Newtonianischen Attractionsgesetz ausgedrückt; zerlegt man diese Anziehung nach den drei Axen, und bezeichnet die drei Seitenkräfte durch d^3X, d^3Y, d^3Z, wovon die erste parallel mit der Axe der x, die zweite mit der Axe der y, die dritte mit der Axe der z wirkt, so hat man

$$d^3X = \frac{dM}{r^3}(\xi - x)$$

$$d^3Y = \frac{dM}{r^3}(\eta - y)$$

$$d^3Z = \frac{dM}{r^3}(\zeta - z).$$

Substituirt man in diesen Gleichungen, an die Stelle von dM und r, ihre Werthe, und integrirt dreimal, so erhält man

$$X = \iiint \frac{(\xi - x).\, dx\, dy\, dz}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \iiint \frac{(\eta - y)\, dx\, dy\, dz}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z = \iiint \frac{(\zeta - z)\, dx\, dy\, dz}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

so dass X, Y, Z die Anziehungen des ganzen Körpers auf den Punkt angeben.

§. 277.

Unter dieser Form würde aber die Ausführung der Integration grossen Schwierigkeiten unterworfen seyn. Es ist daher besser, statt der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z, drei andere Bestimmungsstücke einzuführen, welche diese Form vereinfachen. Wir wollen daher x, y, z durch die drei neuen verän-

$$\int \cos u^2 . du \frac{bb\eta \cos u - \frac{4}{\pi} aa\zeta \sin u}{aa \sin u^2 + bb \cos u^2} .$$

$$\int \cos u \sin u . du \frac{2aa\zeta \sin u - \frac{4}{\pi} bb\eta \cos u .}{aa \sin u^2 + bb \cos u^2 .}$$

Integrale müssen von neuem nach u zwi- Gränzen $u = -\frac{1}{2}\pi$ bis $u = +\frac{1}{2}\pi$ genom- den. Setzen wir daher

$$\int \frac{\cos u^3 \, du}{aa \sin u^2 + bb \cos u^2} = A.$$

$$\int \frac{\cos u^2 \sin u \, du}{aa \sin u^2 + bb \cos u^2} = B.$$

$$\int \frac{\cos u . \sin u^2 \, du}{aa \sin u^2 + bb \cos u^2} = C$$

ten wir die Werthe

$X = \pi bb\xi . A.$

$Y = \pi bb\eta . A - 4aa\zeta . B$

$Z = 2\pi aa\zeta . C - 4bb\eta . B.$

Ausdruck von B brauchen wir gar nicht u entwickeln, da man bei einigem Nachdenken sieht, dass er Null werden muss. Denn es ist

$$= \int \frac{-\cos u^2 . d . \cos u}{aa - (aa - bb) \cos u^2}$$

Integral gewiss eine Function von $\cos u$ wird; $\cos u$ einerlei Werth behält, man mag statt oder $-\frac{1}{2}\pi$ setzen, so wird die Differenz he, die durch Substitutionen beider Grössen tegration hervortreten, nothwendig Null

zu finden, setze man $\sin u = \omega$, so wird

$$\frac{(1 - \omega\omega) d\omega}{- bb) \omega\omega + bb}$$

$$\frac{d\omega}{- (aa - bb) \omega\omega} \cdot \frac{aa}{aa - bb} - \int \frac{d\omega}{aa - bb} \cdot$$

$$\frac{a}{- bb)^{\frac{3}{2}}} \; Arc\ tg\left(= \frac{\sqrt{aa - bb} . \omega}{b}\right) - \frac{\omega}{aa - bb}$$

$$X = \tfrac{4}{3}\pi\xi\,(1 - \tfrac{1}{5}\delta^2 + \tfrac{3}{35}\delta^4)$$
$$Y = \tfrac{4}{3}\pi\eta\,(1 - \tfrac{1}{5}\delta^2 + \tfrac{3}{35}\delta^4)$$
$$Z = \tfrac{4}{3}\pi\zeta\,(1 + \tfrac{2}{5}\delta^2 - \tfrac{8}{35}\delta^4).$$

Will man statt der Grösse δ die Abplattung α ren, so hat man die beiden Gleichungen

$$aa - bb = bb\,\delta\delta$$
$$bb = aa\,(1-\alpha)^2$$

ch $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = 1 + \delta\delta$; hieraus folgt $\delta\delta = 2\alpha$ α, sobald man sich auf das Quadrat von α bekt, und man erhält

$$X = \tfrac{4}{3}\pi\xi.\,(1 - \tfrac{2}{5}\alpha - \tfrac{9}{35}\alpha\alpha)$$
$$Y = \tfrac{4}{3}\pi\eta.\,(1 - \tfrac{2}{5}\alpha - \tfrac{9}{35}\alpha\alpha)$$
$$Z = \tfrac{4}{3}\pi\zeta.\,(1 + \tfrac{2}{5}\alpha + \tfrac{9}{35}\alpha\alpha).$$

§. 282.

Da die Lage der Axe der X willkührlich ist, so man dieselbe immer so annehmen, dass $\eta = 0$

Dann hat man die Mittelkraft $R = \sqrt{XX + ZZ}$, wenn man sich auf die erste Potenz der Abplatt- beschränkt

$$= \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{[(\xi\xi + \zeta\zeta) - \tfrac{2}{5}\alpha\,(\xi\xi - \zeta\zeta)]}.$$

Nennt man den Winkel, den die Richtung der t mit der Ebene der x, y macht, w, so hat man

$$\text{ng } w = \frac{Z}{X} = \frac{\zeta}{\xi}\,(1 + \tfrac{2}{5}\alpha).$$

t der Punkt auf der Oberfläche des Sphäroïds, so s die Gleichung

$$aa\zeta\zeta + bb\xi\xi = aabb$$

; finden; setzt man $\zeta = b.\,sin\,U$, $\xi = a.\,cos\,U$, wird

$$+ \zeta\zeta = aa\,cos\,U^2 + bb\,sin\,U^2$$
$$= aa\,(1 - 2\alpha\,sin\,U^2).$$
$$- \zeta\zeta = aa\,cos\,U^2 - bb\,sin\,U^2$$
$$= aa\,(cos\,U^2 - sin\,U^2 + 2\alpha\,sin\,U^2),$$

$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{b}{a}\,tang\,U$, folglich auch

$$= \tfrac{4}{3}\pi a\sqrt{[1 - \tfrac{2}{5}\alpha + \tfrac{2}{5}\alpha\,sin\,U^2]}.$$

$$tang\, w = \frac{b}{a}(1 + \tfrac{1}{4}\alpha)\, tang\, U.$$
$$= \frac{bb}{aa}(1 + \tfrac{1}{4}\alpha)\, tang\, V$$
$$= (1 - \tfrac{1}{4}\alpha)\, tang\, V$$

wo V die Polhöhe bedeutet, indem $a\, tg\, U = b\, tg\, V$ ist. In der Formel für R kann man sogleich für U, die Polhöhe V setzen, da beide Winkel nur um eine Grösse verschieden sind, die mit der Abplattung gleiche Dimension hat und man hat mit Ausziehung der Quadratwurzel

$$R = \tfrac{1}{3}\pi a\, [1 - \tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\, sin\, U^2].$$

Uebrigens sieht man, dass die Richtung der Anziehung R einen kleinern Winkel mit der Ebene der x und y macht, als die Normale, welche auf das Sphäroïd an demselben Punkt gezogen wird, aber einen grössern als der aus dem Mittelpunkt gezogene Radius mit derselben Ebene bildet. Die Richtigkeit der erstern Behauptung ergiebt sich aus der Gleichung $tang\, w = (1 - \tfrac{1}{4}\alpha)\, tang\, V$, was die zweite anbelangt, so hat man auch aus den obigen Formeln

$$tang\, w = \frac{aa}{bb}\, tang\, V\, (1 + \tfrac{1}{4}\alpha)$$

allein nach §. 242. wird $\frac{bb}{aa}\, tang\, V = tang\, \varphi$, wo φ den Winkel des Radius Vectors mit der Ebene der x, y ausdrückt, folglich $tang\, w = tang\, \varphi\, (1 + \tfrac{1}{4}\alpha)$, also $w > \varphi$. Man muss aber wohl berücksichtigen, dass bei diesen Schlüssen die Schwungkraft nicht mit in Betracht gezogen ist, sondern das Sphäroïd als ruhend angesehen wird.

§. 283.

Die Anziehung eines Ellipsoïds, das nicht durch Umdrehung entstanden ist, lässt sich ebenfalls bis zu einem gewissen Punkte der Rechnung auffinden, allein man gelangt zuletzt zu einem Integrale, welches nicht durch die gewöhnlichen Functionen ausgedrückt werden kann. Bezeichnen wir die drei halben Axen desselben durch a, b, c, so dass a auf der Axe der x,

Diese Integrale müssen zuerst von $t = 0$ bis genommen werden; man sieht aber leicht, dass T eine Function von $\sin t$ und $\cos t^2$ bedeutet, zwischen den besagten Gränzen genommene Int $\int T.\ \cos t.\ dt = \int T.\ d.\ \sin t = 0$ werden muss.

Hierdurch fallen die Integrale

$$\int \frac{\cos t.\ dt}{N}, \quad \int \frac{\sin t.\ \cos t.\ dt}{N},$$

ganz weg, und es bleiben blos die Ausdrücke

$$X = 2b^2c^2\xi \iint \frac{\cos t^2\ \cos u^3\ du\ dt}{N},$$

$$Y = 2a^2b^2\zeta \iint \frac{\sin t\ \cos u^2\ \sin u.\ du\ dt}{N}$$

$$+ 2a^2c^2\eta \iint \frac{\sin t^2\ \cos u^3\ du\ dt}{N},$$

$$Z = 2a^2b^2\zeta \iint \frac{\cos u\ \sin u^2\ du\ dt}{N}$$

$$+ 2a^2c^2\eta \iint \frac{\sin t.\ \cos u^2\ \sin u.\ du.\ dt}{N}.$$

aus folgt nun

$$(a-cc)E+ccF=\int dq-ia\int\frac{qqdq}{cc+(aa-cc)qq}$$

$$-\frac{2ia}{aa-cc}+\frac{2iac}{(aa-cc)^{\frac{3}{2}}}\cdot Arc\,tg\left(=\frac{\sqrt{aa-cc}}{c}\right)$$

$$[(aa-cc)E-ccF]$$

$$-a-i)dq+ia^2\int\frac{qqdq}{cc+(aa-cc)qq}$$

$$a+\frac{2icc}{aa-cc}-\frac{2iaac}{(aa-cc)^{\frac{3}{2}}}\cdot Arc\,tg=\left(\frac{\sqrt{aa-cc}}{c}\right).$$

hier setzten wir $\frac{\sqrt{aa-bb}}{b}=\delta$, wo b die Um-saxe des Sphäroïds war, und da im vorlie-Fall die Drehung um die Axe c geschieht, so wir $\frac{\sqrt{aa-cc}}{c}=\delta$ setzen. Man erhält dann

$$\frac{2\pi(a-i)\xi}{2ia}\left[2a-\frac{2ia^2}{cc\delta\delta}\right.$$

$$\left.+\frac{2ia^2}{cc\delta\delta}Arc\,(tang=\delta)-2a+2i\right].$$

$$\frac{2\pi a\eta}{2ia}\left[2a-2a-\frac{2i}{\delta\delta}+\frac{2iaa}{cc\delta^2}Arc\,(tg=\delta)\right]$$

enn man die sich aufhebenden Glieder weg-durch $2i$ dividirt, und dann das noch übrig de $i=0$ nimmt, so kommt

$$=\frac{2\pi\xi\,aa}{cc\delta^3}\left[Arc\,tang(=\delta)-\frac{\delta}{1+\delta\delta}\right];$$

$$=\frac{2\pi\eta.\,aa}{cc\delta^3}\left[Arc\,tang(=\delta)-\frac{\delta}{1+\delta\delta}\right];$$

dieselben Formeln sind als §. 280. gefunden t.

§. 290.

i der Theorie über das Gleichgewicht sowohl Bewegung der Flüssigkeiten, muss man als

Axen macht, so beschaffen, dass wenn wir diesel
durch ξ', η', ζ' bezeichnen

$$\cos\xi' = -\cos\zeta' \cdot \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right), \quad \cos\eta' = -\cos\zeta' \cdot \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right).$$

Da nun die Gleichung der Oberfläche $dp = 0$ o

$$\left(\frac{dp}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{dp}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right) d\zeta = 0$$

ist, so wird

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right) = -\frac{\left(\frac{dp}{d\xi}\right)}{\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)}, \qquad \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right) = -\frac{\left(\frac{dp}{d\eta}\right)}{\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)}$$

also auch

$$\cos\xi' \cdot \left(\frac{dp}{d\zeta}\right) = \cos\zeta' \cdot \left(\frac{dp}{d\xi}\right),$$

$$\cos\eta' \cdot \left(\frac{dp}{d\zeta}\right) = \cos\zeta' \cdot \left(\frac{dp}{d\eta}\right).$$

und da $\cos\xi'^2 + \cos\eta'^2 + \cos\zeta'^2 = 1$ ist, so
giebt sich

$$\cos\xi' = \frac{\left(\frac{dp}{d\xi}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)^2\right]}},$$

$$\cos\eta' = \frac{\left(\frac{dp}{d\eta}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)^2\right]}},$$

$$\cos\zeta' = \frac{\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)^2\right]}}.$$

aus der Dichtigkeit in das Volumen, also

$$M = \tfrac{4}{3}\rho'\pi\, AAB$$

an wir hierin $AA = BB\,(1+\delta\delta)$ substitui-
erhalten wir

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\rho' B^3.\,(1+\delta\delta).$$

e Gleichung bestimmt die halbe kleine Axe,
f gegeben und δ aus der Gleichung des vo-
ragraphs gefunden ist.

§. 294.

Mittelkraft der drei Seitenkräfte P, Q, R,
ige Kraft, welche wir die Schwere nennen,
wollen dieselbe durch G bezeichnen; man

$$= 2\sqrt{nn\zeta\zeta + (m-f)^2\,(\xi\xi+\eta\eta)}$$

$n = (m-f)\,(1+\delta\delta)$, so wird auch

$$= 2(m-f)\,\sqrt{\zeta\zeta(1+\delta\delta)^2 + (\xi\xi+\eta\eta)}.$$

der Punkt auf der Oberfläche des Sphäroïds,
an zwischen den drei Coordinaten ξ, η, ζ,
hung

$$AA\zeta\zeta + BB(\xi\xi+\eta\eta) = AABB$$

an man statt AA, $BB(1+\delta\delta)$ setzt

$$\delta\delta)\,\zeta\zeta + (\xi\xi+\eta\eta) = (1+\delta\delta)\,BB.$$

Substitution des hieraus folgenden Werthes
$\eta\eta$ in den Ausdruck von G ergiebt sich

$$2(m-f)\,\sqrt{1+\delta\delta.}\,\sqrt{BB+\zeta\zeta\,\delta\delta.}$$

der Coordinate ζ die Polhöhe v einzuführ-
man

$$= \frac{BB.\,\sin v^2}{1+\delta\delta.\,\cos v^2}.$$

rch ergiebt sich

$$2(m-f)\,B.\,\frac{1+\delta\delta}{\sqrt{1+\delta\delta\,\cos v^2}}$$

$$\frac{2nB}{\sqrt{1+\delta\delta\,\cos v^2}}.$$

ferner

$$\tfrac{4}{3}\pi\rho'\,\frac{1+\delta\delta}{\delta^3}\,[\delta - Arc\ tang(=\delta)]$$

Es wird daher auch, wenn man diesen Werth in die Gleichung für πl substituirt,

$$\pi l = \frac{720\,s}{\pi\,\delta^2}\,\rho'(1+\delta\delta\,\cos v^2)\;[\delta - Arc\,tang(=\delta)].$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{720\,s}{\pi^2 l\,\delta^2}\,(1+\delta\delta\,\cos v^2)\;[\delta - Arc\,tang(=\delta)].$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dieser $\frac{f}{\rho'} = \frac{2\pi}{TT}$, so kommt

$$\frac{f}{\pi\rho'} = \frac{1440\,s}{\pi TT.\,l.\,\delta^2}\,(1+\delta\delta\,\cos v^2)\;[\delta - Arc\,(tg=\delta)].$$

§. 296.

Unter dem Aequator ist die Pendellänge $=39{,}01520$ englische Zoll gefunden. Nimmt man das Verhältniss des englischen Zoll zum französischen wie $1:1{,}06575$, so erhält man die Länge des Secundenpendels

$$l = \frac{39{,}01520}{1{,}06575}\ \text{französische Zoll}$$

$$= \frac{39{,}01520}{1{,}06575.\,72}\ \text{Toisen.}$$

Die Länge eines Grades unter dem Aequator findet sich aus (§. 248.)

$$s = 56722\ \text{Toisen.}$$

Die Umdrehungszeit T der Erde um ihre Axe ist gleich dem mittlern Sonnentag, multiplicirt durch $0{,}99727$, und da wir für die Zeiteinheit die Secunde angenommen haben, so wird

$$T = 86400.\,0{,}88727.$$

Man findet daher den constanten Factor

$$\frac{1440\,s}{TT.\,l.\,\pi} = \frac{1440.\,56722.\,72.\,1{,}06575}{\pi.\,39{,}01520.\,86400^2\,(0{,}99727)^2}$$

$$= 0{,}006887558$$

und wir wollen denselben der Kürze wegen durch μ bezeichnen. Da in diesem Fall zugleich die Polhöhe $v=0$ ist, so hat man $\cos v = 1$, also

$$\frac{f}{\pi\rho'} = \mu\,\frac{1+\delta\delta}{\delta^2}\;[\delta - Arc\,tang(=\delta)].$$

§. 298.

Bezeichnet man durch G' die Kraft der Schwere
1 Aequator, so hat man, indem in der letzten
eichung des §. 294. statt G und v, G' und Null
setzt werden

$$G' = \frac{4\pi B\rho' \sqrt{1+\delta\delta}}{\delta^3} \quad [\delta - Arc\ tang = \delta].$$

d wenn man mit dieser Gleichung die allgemeine
r G dividirt, so kommt

$$G = G' \sqrt{\frac{1+\delta\delta}{1+\delta\delta\ cos\, v^2}}.$$

Nun war ferner, wenn l die Länge des Secun-
npendels unter dem Aequator bedeutet, $G' = \pi\pi l$,
glich auch

$$G = \pi\pi l. \sqrt{\frac{1+\delta\delta}{1+\delta\delta\ cos\, v^2}}.$$

tzt man hierin statt $\delta\delta$, 2α, und entwickelt das
lical, so kommt

$$G = \pi\pi l\ (1 + \alpha\ sin\, v^2)$$

d wenn man statt l seinen in französischen Fuss
gedrückten Werth aus (§. 296.) nimmt

$$G = 30{,}109 + 0{,}129\ sin\, v^2.$$

Bedeutet L die in der Breite v statt findende
nge des Secundenpendels, so hat man $G = \pi\pi L$,
d daher

$$L = l\ (1 + \alpha\ sin\, v^2).$$

es giebt in französischen Zollen ausgedrückt

$$L = 36{,}608 + 0{,}158\ sin\, v^2.$$

Man findet endlich noch den Werth von $\frac{f}{\pi\rho'}$, aus
r Gleichung

$$\frac{f}{\pi\rho'} = \mu \frac{1+\delta\delta}{\delta^3} \quad [\delta - Arc\ (tang = \delta)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\mu\ [1 + \tfrac{2}{5}\delta^2 - \tfrac{6}{35}\delta^4]$$
$$= \tfrac{1}{2}\mu\ [1 + \tfrac{4}{5}\alpha^2 + \tfrac{8}{15}\alpha^2]$$
$$= 0{,}002303814.$$

d man hat daher zur Bestimmung der Coefficienten und q die Gleichungen

$$\tfrac{1}{8}\pi p - \frac{16}{\pi^3} = 0$$

$$\tfrac{1}{8}\pi q - \frac{16p}{\pi} + \frac{12}{\pi^3} = 0$$

$$p = \frac{32}{\pi^3}, \quad q = \frac{8(128 - 3\pi\pi)}{\pi^5}.$$

an hat hierdurch

$$\text{tang}\, 6 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right) + \frac{32}{\pi^3}\cdot\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^3 + \frac{8(128 - 3\pi\pi)}{\pi^5}\cdot\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^5$$

d es ergiebt sich in Zahlen $\text{tang}\, 6 = 0{,}0014722$, $\delta = \frac{1}{\text{tang}\, 6} = 679{,}25$.

Da wir $A = B\sqrt{1 + \delta\delta}$ gesetzt hatten, so ergiebt , dass die grosse Axe des Sphäroïds beinahe 680 grösser als die kleine seyn würde. Es ist ferner $= A(1 - \alpha)$, wo α die Abplattung bedeutet, folg- $1 - \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta\delta}}$, und durch den eben ge- denen Werth von δ, würde die Abplattung 0,99852 betragen.

§. 300.

Es dürfte wohl der Mühe werth seyn, zu unter- chen, ob die Gleichung aus welcher wir δ ableiten, t noch mehr Wurzeln habe, ausser den zwei denen. Um den Bruch zu vermeiden, wollen $\frac{f}{\pi\rho'} = k$ setzen, so dass also

$$\frac{3 + k\delta\delta}{3 + \delta\delta}\cdot\delta - \text{Arc tang}(= \delta) = 0$$

rd. Wir können nun δ als die Abscisse der Punkte er krummen Linie betrachten, deren zugehörigen

Ordinaten durch Δ bezeichnet werden sollen, die Gleichung dieser krummen Linie wird durch

$$\Delta = \frac{\delta + k\delta^3}{3 + \delta\delta}\,\delta - Arc\ tang(=\delta).$$

ausgedrückt werden können. Setzt man $\Delta = 0$ geben die diesen entsprechenden Werthe von δ Punkte an, wo die krumme Linie die Abscissen schneidet, und so viel solcher Durchschnittspu vorhanden sind, so viel Wurzeln wird die Gleic $\Delta = 0$ auch besitzen.

§. 301.

Wenn man die Gleichung $\Delta = \ldots$ differen so erhält man

$$\frac{d\Delta}{d\delta} = \delta\delta.\frac{3k - 2(2 - 5k)\,\delta^2 + k\delta^4}{(3 + \delta\delta)^2\ (1 + \delta\delta)}$$

und da bekanntlich $d\Delta = 0$ die Maxima und Mi von Δ angiebt, so wird die Gleichung

$$3k - 2(2 - 5k)\,\delta^2 + k\,\delta^4 = 0$$

die entsprechenden Werthe von δ enthalten. Setzt darum

$$\delta^2 = 2 - 5k \mp \sqrt{4 - 2(k + 22k^2}$$

Da unter dem Wurzelzeichen stehende G

$2 - 5k$, und da $2 > 5k$, so

bt sich die krumme Linie über die Abscissenlinie
id erreicht ihre grösste Höhe für

$$\delta = + \sqrt{\frac{2 - 5k - \sqrt{4 - 20k + 22k^2}}{k}}.$$

Dann nähert sie sich der Abscissenlinie wieder,
rchschneidet sie in der Stelle, die der zuerst ge-
adenen Abplattung §. 297. entspricht, und geht
nn auf der untern Seite derselben weiter, bis δ
n Werth

$$+ \sqrt{\frac{2 - 5k + \sqrt{4 - 20k + 22k^2}}{k}}$$

nimmt. Dass sie nun wieder die Abscissenlinie
rchschneiden muss, folgt aus der Gleichung für Δ;
nn setzt man darin δ sehr gross, so erhält Δ einen
sitiven Werth, und dieser zweite Durchschnitts-
nkt giebt den andern §. 299. gefundenen Werth
r Abplättung. Andere Durchschnittspunkte können
f der positiven Seite der δ nicht vorhanden seyn,
il sonst die Gleichung $d\Delta = 0$ wenigstens noch
rei Werthe für δ geben müsste.

Die negativen Werthe von δ brauchen wir nicht
betrachten, da gleich grosse positive und negative
Werthe von δ auch gleich grosse entgegengesetzte
Werthe von Δ geben, und ausserdem die Abplattung
h blos durch das Quadrat von δ bestimmt.

§. 303.

Die bis jetzt geführten Rechnungen zeigen deut-
h, dass das elliptische Sphäroïd diejenige Gestalt
, welche die Erde haben muss, wenn sich dieselbe
n eine Axe dreht, und aus einer gleichförmig dich-
n, flüssigen Materie bestehend gedacht wird. Al-
in die letztere Annahme ist nicht mit der Natur
ereinstimmend; denn wenn wir auch annehmen,
ss anfangs die Erde wirklich flüssig war, so ist es
ch den über die Zusammendrückbarkeit der tropf-
ren Flüssigkeiten angestellten Versuchen zufolge,
ahrscheinlich, dass die Dichtigkeit der flüssigen
aterie im Innern der Erde zunehmen muss. Aus-
rdem ist auch noch zu berücksichtigen, dass di

§. 305.

Die Grösse V lässt sich auf eine sehr einfache Weise durch eine partielle Differentialgleichung darstellen, indem dieselbe als Function von ξ, ζ, η betrachtet wird. Setzt man der Kürze wegen

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = RR,$$

ist $V = \int \frac{dM}{R}$, also wenn man differentiirt

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) = -\int \frac{dM}{R^2} \cdot \left(\frac{ddR}{d\xi^2}\right) + 2\int \frac{dM}{R^3} \cdot \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2$$

$$\left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right) = -\int \frac{dM}{R^2} \cdot \left(\frac{ddR}{d\eta^2}\right) + 2\int \frac{dM}{R^3} \cdot \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2$$

$$\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right) = -\int \frac{dM}{R^2} \cdot \left(\frac{ddR}{d\zeta^2}\right) + 2\int \frac{dM}{R^3} \cdot \left(\frac{dR}{d\zeta}\right)^2.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so kommt

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right)$$

$$= 2\int \frac{dM}{R^3} \left[\left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\zeta}\right)^2\right]$$

$$- \int \frac{dM}{R^2} \left[\left(\frac{ddR}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddR}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddR}{d\zeta^2}\right)\right].$$

Man hat aber aus der obern Gleichung

$$\left(\frac{dR}{d\xi}\right) = \frac{(\xi - x)}{R},$$

$$\left(\frac{dR}{d\eta}\right) = \frac{\eta - y}{R},$$

$$\left(\frac{dR}{d\zeta}\right) = \frac{\zeta - z}{R}.$$

$$\left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\zeta}\right)^2 = 1.$$

$$\left(\frac{ddR}{d\xi^2}\right) = \frac{RR - (\xi - x)^2}{R^3},$$

$$\left(\frac{dR}{,2}\right) = \frac{RR - (\eta - y)^2}{R^3},$$

funden wird, wo ρ die Dichtigkeit desselben bezeichnet, so wird

$$V = \int \frac{\rho\, r^2 dr.\, d\varphi.\, d\psi\, \cos\psi}{\sqrt{[r'r' - 2r'r\cos\omega + rr]}}$$

erden, indem wir der Kürze wegen

$\sin\psi.\sin\psi' + \cos\psi.\cos\psi'.\cos(\varphi' - \varphi) = \cos\omega.$

nehmen. Man bemerkt leicht, dass ω der Winkel t, den die beiden Radien r und r' mit einander ilden.

§. 307.

Man kann nun V als eine Function von r', φ', ψ' etrachten, so dass

$$dV = \left(\frac{dV}{dr'}\right) dr' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) d\psi' + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) d\varphi'$$

yn wird. In so fern V als eine Function von ξ, η, angesehen wird, hat man das Differential

$$dV = \left(\frac{dV}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{dV}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right) d\zeta$$

nd da aus den Relationen zwischen ξ, η, ξ, r', φ', ' die Gleichungen

$$r'r' = \xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta$$

$$tang\,\varphi' = \frac{\eta}{\xi},$$

$$tang\,\psi' = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi\xi + \eta\eta}},$$

olgen, so erhält man durch Differentiation

$$dr' = \frac{\xi}{r'} d\xi + \frac{\eta}{r'} d\eta + \frac{\zeta}{r'} d\zeta.$$

$$d\varphi' = \frac{d\eta}{\xi} \cos\varphi'^2 - \frac{\eta d\xi}{\xi\xi} \cos\varphi'^2$$

$$d\psi' = \frac{d\zeta\, \cos\psi'^2}{\sqrt{\xi\xi + \eta\eta}} - \zeta \frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{(\xi\xi + \eta\eta)^{\frac{3}{2}}} \cos\psi'^2.$$

tzt man diese Werthe von dr', $d\varphi'$, $d\psi'$ in die ng für dV, so kommt

$$dV = \left\{\left(\frac{dV}{dr'}\right)\cos\varphi'\cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)\frac{\sin\varphi'}{r'\cos\psi'} - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\psi'}{r'}\right\}d\xi.$$

$$+\left\{\left(\frac{dV}{dr'}\right)\sin\varphi'\cos\psi' + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)\frac{\cos\varphi'}{r'\cos\psi'} - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\sin\varphi'\sin\psi'}{r'}\right\}d\eta.$$

$$+\left\{\left(\frac{dV}{dr'}\right)\sin\psi' - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\cos\psi'}{r'}\right\}d\zeta.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorigen, wo V als Function von ξ, η, ζ betrachtet wurde, so ergiebt sich

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right)\cos\varphi'\cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)\cdot\frac{\sin\varphi'}{r'\cos\psi'} - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\psi'}{r'},$$

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right)\sin\varphi'\cos\psi' + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)\cdot\frac{\cos\varphi}{r'\cos\varphi'} - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\sin\varphi'\sin\psi'}{r'},$$

$$\left(\frac{dV}{d\zeta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right)\sin\psi' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\cos\psi'}{r'}$$

wodurch also die drei nach den Axen zerlegten Anziehungen auch vermittelst der Polarcoordinaten des angezogenen Punktes gegeben sind, sobald man V kennt, da die vor dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder, nach §. 290., nichts anders als die Seitenkräfte der Anziehungskraft sind.

$$-2\left(\frac{ddV}{dr'd\psi'}\right)\frac{\cos\varphi'^2\cos\psi'\sin\psi'}{r'}$$

$$+2\left(\frac{ddV}{d\varphi'd\psi'}\right)\frac{\cos\varphi'\sin\varphi'\sin\psi'}{r'r'\cos\psi'}$$

$$+2\left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{r'r'\cos\psi'^2}$$

$$+\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\frac{2\cos\varphi'^2\cos\psi'^2-\sin\varphi'^2}{r'r'\cos\psi'}\sin\psi'$$

$$+\left(\frac{dV}{dr}\right)\frac{\sin\varphi'^2+\cos\varphi'^2\sin\psi'^2}{r'}.$$

§. 309.

Die beiden übrigen partiellen Differentialien $\left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right)$, $\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right)$ können nun auf dieselbe Art gefunden werden; allein man wird sich bei einiger Aufmerksamkeit auf die Zusammensetzung der Gleichungen für $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\eta}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)$, dr', $d\varphi'$, $d\psi'$ diese Arbeit ersparen können. Denn man wird $\left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right)$ aus $\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right)$ finden, wenn man statt φ', $\psi'-90°$ setzt, und eben so erhalten wir $\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right)$ aus $\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right)$, indem $\varphi=0$ genommen, und statt ψ', $\psi'-90$ substituirt wird. Es wird auf diese Weise

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right)+\left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right)+\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right)=$$

$$\left(\frac{ddV}{dr'^2}\right)+\left(\frac{ddV}{d\varphi'^2}\right)\cdot\frac{1}{r'r'\cos\psi'^2}+\left(\frac{ddV}{d\psi'^2}\right)\cdot\frac{1}{r'r'}\cdot$$

$$-\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\sin\psi'}{r'r'\cos\psi'}+\left(\frac{dV}{dr'}\right)\cdot\frac{2}{r'}\cdot$$

n eine geschlossene Reihe ent-
Potenzen der Grösse $cos(\varphi' - \varphi)$
ren Coefficienten Functionen von
$cos\,\psi'$ seyn werden. Nun ist
jede Potenz eines Cosinus sich
ler Vielfachen des Winkels aus-
h wird man auch

$$cos(\varphi' - \varphi) + T^{\nu'} cos\,2(\varphi' - \varphi)$$
$$\ldots\ldots + T^{(m)} cos\,m(\varphi' - \varphi)$$

T^0, T^{ν}, $T^{\nu'}$ . . . . blos ψ und ψ'
Vielfachen des Winkels $\varphi' - \varphi$,
zum m fachen im Ausdruck von
, ist daraus einleuchtend, dass
als $cos\,\omega^m$ darin vorkommt, die
re Potenzen als $cos(\varphi' - \varphi)^m$ her-
nd das höchste Vielfache in der
$s(\varphi' - \varphi)^m$, $cos\,m(\varphi' - \varphi)$ seyn

§. 314.

Differentiale dieses Werthes von
g (B) §. 312., so findet man auf
n angegebenen Paragraph, dass
$T^{\nu'}$ . . . so beschaffen seyn müs-

$$n)$$
$$-$$
$$- + \frac{nn}{1-\mu\mu} \cdot T^{(n)}$$
$$+ m.(m+1)\,T^{(n)} = 0$$

urch sich die Form der Function
is dem Werth von $cos\,\omega$ zeigt
vertauscht werden kann, ohne
die Form des Ausdrucks ändert;
ie symmetrische Function von
aus demselben Grunde auch $T^{(n)}$.

[illegible]

[illegible]

[illegible] die Erde sey [illegible] von ungleich[illegible] [illegible] natürlichsten vor[illegible] [illegible] dünne Schicht, dere[illegible] [illegible] durch Umdrehun[illegible] [illegible] man z. B. di[illegible] [illegible] so würd[illegible] [illegible] Dichtigkeit ebenfall[illegible] [illegible] Umdrehung[illegible] [illegible] zusammenfal[illegible] [illegible] für irgen[illegible] [illegible] ungeändert, sonder[illegible] [illegible] Elementen v[illegible] [illegible] die Grösse ρ, wel[illegible] [illegible] daher von [illegible]

[illegible]

[illegible] die [illegible] ist, rück[illegible] [illegible] die Function [illegible]

$$V = [illegible] \ldots]$$

$$\Omega^{(m)} d\varphi = \int T^0 d\varphi + \int T' d\varphi . \cos(\varphi' - \varphi) +$$
$$+ \ldots\ldots + \int T^{(m)} d\varphi . \cos m(\varphi' - \varphi)$$

len wird. Allein zwischen den angegebenen
ızen von φ, sieht man leicht, dass

$$\int T' . d\varphi . \cos(\varphi' - \varphi) = 0$$
$$\int T'' . d\varphi . \cos 2(\varphi' - \varphi) = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\int T^{(m)} . d\varphi . \cos m(\varphi' - \varphi) = 0.$$

muss, so dass blos

$$\int \Omega^{(m)} d\varphi = \int T^0 d\varphi = 2\pi T^0$$

t.

Man hat also, wenn man statt T^0, T_m setzt, um
zeigen; dass es das erste Glied der Entwickelung
$\Omega^{(m)}$ ist

$$= \frac{2\pi}{r'} \int \varrho\, rr\, dr . d\psi \cos\psi . \left\{ \begin{array}{l} 1 + T_1 \frac{r}{r'} \\ \qquad + T_2 \frac{r^2}{r'^2} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

ıss wir noch die beiden Integrationen nach r und
szuführen haben.

§. 317.

Man muss nun den Radius Vector r als eine
tion eines bestimmten Radius Vectors derselben
ht von gleicher Dichtigkeit, und des Winkels
trachten, und wir wollen für diesen bestimmten
ıs Vector denjenigen nehmen, für welchen der
kel ψ Null ist. Bezeichnen wir denselben durch
o wird die Dichtigkeit in jeder Schicht als eine
tion von q angesehen werden müssen. Bildeten
die Schichten von gleicher Dichtigkeit ellipti-
Sphäroïde, in denen das Verhältniss der Axen
ɛr dasselbe bleibt, so würde q allgemein die
ɜ grosse Axe des Sphäroïds bezeichnen, und wenn
die halbe kleine Axe durch nq bezeichnet, so
lt man in diesem besondern Fall

$$r = \frac{nq}{\sqrt{\sin\psi^2 + n^2 \cos\psi^2}} .$$

Da nun bei der Integration nach der veränderlichen Grösse r, ψ als constant angesehen werden muss, so wird man statt dr', das Differential $P.d$ setzen können, wo P eine Function von q und seyn wird. Wir nehmen der Kürze wegen

$$\int \varrho . r r . dr = N, \quad \int \varrho . r^3 dr = N', \quad \int \varrho . r^4 . dr = N$$

u. s. w., wo die Integrale von $q = 0$ bis zu dem Werthe von q genommen werden müssen, welcher derjenigen Schicht entspricht, welche durch den gezogenen Punkt geht. Liegt der Punkt völlig ausserhalb des anziehenden Körpers, so muss das Integral von $q = 0$ bis zu dem Werthe von q, der der Oberfläche angehört, genommen werden.

Endlich sehe man die Integrationen nach ψ, von $\psi = -90°$ bis $\psi = +90°$ genommen, als ausgeführt an, und setze

$$\int N . \quad d\psi . \cos\psi = L$$
$$\int N . T_1 . d\psi . \cos\psi = L'$$
$$\int N . T_2 . d\psi . \cos\psi = L'' \text{ u. s. w.}$$

so erhält man folgenden Werth von V,

$$V = \frac{1}{r}\left[\frac{L}{r^0} + \frac{L'}{r^1} + \frac{L''}{r^2} + \ldots\right].$$

§ 318.

Dieser Werth von V giebt aber blos die Anzie-

$$V' = 2\pi \int \varrho . r dr\, d\psi . \cos\psi \left[1 + T_1 \frac{r'}{r} + T_2 \frac{r'^2}{r^2} + \ldots\right].$$

Integrirt man nun nach r, und setzt

$$\int \varrho . r dr = \mathfrak{N}.$$
$$\int \varrho . dr = \mathfrak{N}'$$
$$\int \varrho . \frac{dr}{r} = \mathfrak{N}'' \text{ u. s. w.}$$

o die Integrale von dem Werthe von q, welcher r durch den angezogenen Punkt gehenden Schicht tspricht, bis zu demjenigen, der der Oberfläche gehört, genommen werden müssen, so wird, wenn ch der Kürze wegen die zwischen den Gränzen $= -90°$ und $\psi = +90°$ genommenen Integrale

$$\int \mathfrak{N} . \quad d\psi . \cos\psi = \mathfrak{L}$$
$$\int \mathfrak{N}' . T_1 . d\psi . \cos\psi = \mathfrak{L}'$$
$$\int \mathfrak{N}'' . T_2 . d\psi . \cos\psi = \mathfrak{L}'' \text{ u. s. w.}$$

nimmt,

$$V' = 2\pi \left[\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' r' + \mathfrak{L}'' r'' + \ldots\ldots\right].$$

§. 319.

Nun ist in §. 290 und 291. gezeigt worden, dass ne flüssige Masse, auf welche nach den Richtungen r drei Axen ξ, η, ζ, die Kräfte P, Q, R wirken, Gleichgewichte seyn wird, wenn die Gestalt ihrer berfläche durch die Differentialgleichung

$$P d\xi + Q d\eta + R d\zeta = 0$$

sgedrückt wird.

In unserm Fall sind die Kräfte, welche auf die üssige Masse wirken, die Anziehung der einzelnen heile derselben gegen einander, und die durch die rehung hervorgebrachte Centrifugalkraft. Die Anehungskräfte geben den Ausdruck §. 276.

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta$$

d die Centrifugalkraft giebt, da sie den Anziehun- n entgegengesetzt ist

$$-2f \xi d\xi - 2f \eta d\eta .$$

glich wird die Gleichung der Oberfläche der flüs- en Materie

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta - 2f \xi d\xi - 2f \eta d\eta = 0.$$

§. 320.

Wir sehen ferner aus §. 304., dass

$$X = -\left(\frac{dV}{d\xi}\right), \quad Y = -\left(\frac{dV}{d\eta}\right), \quad Z = -\left(\frac{dV}{d\zeta}\right),$$

seyn wird, folglich hat man

$$-(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta) = \left(\frac{dV}{d\xi}\right)d\xi + \left(\frac{dV}{d\eta}\right)d\eta + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right)d\zeta,$$

und da V blos eine Function der drei Coordinaten ξ, η, ζ des angezogenen Punktes ist, so ist bekannt, dass die hinter dem Gleichheitszeichen stehende Grösse das vollkommene Differential von V ist.

Die vorige Gleichung der im Gleichgewichte befindlichen Oberfläche der Flüssigkeit

$$Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta - 2f(\xi d\xi + \eta d\eta) = 0$$

verwandelt sich daher in diese:

$$dV + 2f(\xi d\xi + \eta d\eta) = 0$$

oder wenn man integrirt

$$V + f(\xi\xi + \eta\eta) = c$$

wo c die Constante bedeutet. Setzt man statt ξ und η ihre Werthe aus §. 306., so wird $\xi\xi + \eta\eta = r'r' \cos\psi'^2$, folglich auch

$$V + fr'r' \cos\psi'^2 = c$$

und dieser Werth von V ist der Summe der beiden in §. 317 und 318. entwickelten Reihen gleich, d. h.

$$V = 2\pi \left\{ \begin{matrix} \frac{L}{r'} + \frac{L'}{r'^2} + \frac{L''}{r'^3} + \ldots. \\ \mathfrak{L} + \mathfrak{L}'r' + \mathfrak{L}''r''^2 + \ldots. \end{matrix} \right\}.$$

§. 321.

Betrachten wir zuerst einen Körper, der nur m einer wenig tiefen Schicht der Flüssigkeit überdeckt is wie dies bei der Erde der Fall ist, da das Meer übe all gegen die Dimensionen dieses Körpers eine nu geringe Tiefe besitzt, so wird die vorige Gleichun der Oberfläche der Flüssigkeit immer noch statt fi den, da es ganz einerlei ist, ob die Anziehungskräf von einem flüssigen oder einem festen Körper he kommen. Bei dieser Voraussetzung können wir d

ıng des Wassers unter sich ganz vernachläs-
ınd es ist dann einleuchtend, dass der Werth
oder die Reihe
$2\pi(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'r' + \mathfrak{L}''r'' + \ldots\ldots)$
erden muss, weil die Gränzen für r zwischen
ı der Ausdruck integrirt wird, mit einander
ıenfallen, und die Gleichung der Oberfläche

$$f r'r' \cos\psi'^2 + 2\frac{\pi}{r'}\left(L + \frac{L'}{r'} + \frac{L''}{r'^2} + \ldots\ldots\right).$$

nmt man ausserdem an, dass die Gestalt der
en nicht sehr von der Kugel abweicht, so
nicht sehr von q verschieden seyn, und wir

$$r = q(1 - 6\theta)$$

wo q die Bedeutung des §. 317. hat. Die
6 ist ein kleiner Coefficient, und θ bezeichnet
nction von ψ. Man begreift leicht, dass wenn
ıichten in der Ebene der ξ, η, ihre grösste
nung haben sollen, und zugleich, gegen diese
symmetrisch liegen, r für gleich grosse posi-
d negative Werthe von ψ einerlei Grösse ha-
uss; folglich wird θ als eine Function von
angenommen werden können.

§. 322.

Wir müssen jetzt die Form der Functionen T_1,
. bestimmen, wenn wir die Integrationen wei-
sführen wollen. Die Gleichung (§. 314.)

$$\frac{-\mu\mu)\dfrac{dT^{(n)}}{d\mu}}{d\mu} + \frac{nn}{1-\mu\mu}\cdot T^{(n)} + m(m+1)\,T^{(n)} = 0$$

t sich, da $T_{(m)}$ im Allgemeinen aus $T^{(n)}$ ent-
ıdem der Index n, Null gesetzt wird, auf

$$\frac{-\mu\mu)\dfrac{dT_{(m)}}{d\mu}}{d\mu} + m.(m+1)\,T_{(m)} = 0.$$

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass wir die Differentialgleichung der zweiten Ordnung, Genü leisten werden, indem wir

$$T_{(m)} = a\mu^m + b\mu^{m-2} + c\mu^{m-4} + \ldots\ldots$$

setzen, wo a, b, c unbestimmte Coeffcienten sin Um dieselben zu bestimmen, substituire man dies Werth, so wie sein Differential in vorige Differe tialgleichung, und setze die zu gleichen Potenz von μ gehörigen Coefficienten Null, so erhält man

$$b = -\frac{m.\ m-1}{2\,(2m-1)}\,a,$$

$$c = -\frac{(m-2)\,(m-3)}{4\,(2m-3)}\,b, \text{ u. s. w.}$$

wo man leicht das Gesetz des Fortganges bemerk

Es wird daher

$$T_{(m)} = a\left\{\mu^m - \frac{m.\ m-1}{2\,(2m-1)}\,\mu^{m-2} + \frac{m.\ m-1.\,(m-2)\,m-3}{2.\,4.\,(2m-1)\,(2m-3)}\,\mu^{m-4}.\right.$$

so dass also der Coefficient a unbestimmt bleibt. B zeichnet man die Reihe durch $M^{(m)}$, so hat man

$$T_{(m)} = a.\ M^{(m)}$$

wo $M^{(m)}$ eine Function von μ oder $\sin\psi'$ ist. Nu soll aber nach §. 314. die Grösse $T^{(m)}$ eine symm trische Function von $\sin\psi'$ und $\sin\psi$ seyn; es wir daher der Coefficient a als Factor die Reihe $M^{(}$ enthalten müssen, indem man in derselben statt $\sin\psi$ setzt, folglich ist

$$a = a'\left\{\sin\psi^m - \frac{m.\,(m-1)}{2\,(2m-1)}\sin\psi^{n-2} + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2).\,(m-3)}{2.\,4.\,(2m-1)\,(2m-3)}\sin\psi^{m-4}\ldots\right.$$

$$= a'\ \Psi^{(m)}$$

und a' wird ein blos von m abhängender Coefficien seyn. Es ist also

$$T_{(m)} = a'.\ M^{(m)}.\ \Psi^{(m)}.$$

§. 323.

Um den Coefficienten a' zu bestimmen, müssen wir auf die Entstehung der Function T zurückgehen. Setzt man statt $\frac{r}{r'}$, u, so entsteht die Reihe (§. 311.)

$$1 + \Omega' u + \Omega'' u^2 + \Omega''' u^3 + \ldots\ldots$$

aus der Entwickelung des Radicals

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2u\cos\omega + uu)}}$$

und wenn man diese Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze ausführt, so kommt

$$1 + \Omega' u + \Omega'' u^2 + \Omega''' u^3 + \ldots\ldots$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} u\,(2\cos\omega - u) + \frac{1.2.}{2.4.} u^2\,(2\cos\omega - u)^2$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} u^3\,(2\cos\omega - u)^3 + \ldots\ldots$$

Das allgemeine Glied der zweiten Reihe wird daher

$$\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2m-1}{2.4.6.8\ldots\ldots 2m}\,.\,u^m\,(2\cos\omega - u)^m$$

und es folgt hieraus leicht, dass alle Glieder die in u^m multiplicirt sind, durch

$$+\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2m-1}{1.2.3.4\ldots\ldots m}\cos\omega^m$$
$$-\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2m-3}{1.2.3.4\ldots\ldots m-2}\,.\,\frac{\cos\omega^{m-2}}{2}$$
$$+\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2m-5}{1.2.3.4\ldots\ldots m-4}\,.\,\frac{\cos\omega^{m-4}}{2.4} - \ldots\ldots$$

ausgedrückt werden; da nun in der andern Reihe der Coefficient von u^m durch $\Omega^{(m)}$ bezeichnet wurde, so ergiebt sich, dass dieser letztere Ausdruck den Werth von $\Omega^{(m)}$ darstellt.

§. 324.

Es war aber aus §. 306. der Werth von

$$\cos\omega = \sin\psi\,.\,\sin\psi' + \cos\psi\,.\,\cos\psi'\,.\,\cos(\varphi' - \varphi);$$

[illegible] Ausdruck in dem von Ω^m [illegible] wie §. 313., erwähnt ist, [illegible] Form

$$[illegible] = [illegible] - [illegible] \cos(\varphi' - \varphi) + T'' \cos 2(\varphi' - \varphi) +$$

[illegible] da wir blos einen Coefficie[illegible] [illegible] Betrachtung eines besondern F[illegible] [illegible] wollen daher annehmen $\psi' =$ [illegible] also darf in dem We[illegible] [illegible] $\varphi' - \varphi$ gar nicht mehr [illegible] es wird $T' = 0$, $T'' = 0$ u. [illegible] Gleichung $\Omega^{(m)} = T^0$, [illegible] §. 316. durch $T_{(m)}$ bezeich[illegible]

$$[illegible] = T_{(m)} \cdot$$

[illegible] aber auch

$$[illegible] = \frac{[illegible] \ldots\ldots 2m-1}{[illegible] \ldots\ldots m} \sin\psi^m$$

$$- \frac{[illegible] \ldots\ldots 2m-3}{[illegible] \ldots\ldots m-2} \frac{\sin\psi^{m-2}}{2}$$

$$- \frac{[illegible] \ldots\ldots 2m-5}{[illegible] \ldots\ldots m-4} \cdot \frac{\sin\psi^{m-4}}{2 \cdot 4}$$

— etc. etc.

§. 325.

es lässt sich leicht durch Induction schliessen,

$$\Psi^{(m)} = \frac{1.2.3.4.5.\ldots\ldots m}{1.3.5.7.9.\ldots\ldots 2m-1}.$$

en wird. Behält man blos die höchste Potenz $\sin\psi$ in der Entwickelung von $\Psi^{(m)}$ §. 323. bei,

$$r_{(m)} = a'.\ \sin\psi^m.\ \frac{1.2.3.4.5\ldots\ m}{1.3.5.7.9\ldots 2m-1}$$

la in vorigem Paragraph mit Weglassung aller zen von $\sin\psi$, bis auf die höchste

$$) = \sin\psi^m.\ \frac{1.3.5.7.\ldots\ldots 2m-1}{1.2.3.4.\ldots\ldots m}$$

len ist, so ergiebt sich daraus

$$a' = \left(\frac{1.3.5.7.\ldots\ldots 2m-1}{1.2.3.4.\ldots\ldots m}\right)^2$$

ir wollen dies durch $a^{(m)}$ bezeichnen.

§. 326.

ntwickelt man das Radical

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2xur+uurr)}}$$

ie nach Potenzen von u fortschreitende Reihe, det man leicht, dass die Entwickelung

$$-\sqrt{a'}\,\Psi' ur + \sqrt{a''}\,\Psi'' u^2r^2 + \ldots\ldots$$

wird, wo Ψ', Ψ''... die Bedeutung des §. 322. , indem man daselbst $\sin\psi = x$ annimmt. Auf ie Weise erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{2xu}{r}+\frac{uu}{rr})}}$$

$$= 1 + \sqrt{a'}\,\Psi'\frac{u}{r} + \sqrt{a''}\,\Psi''\frac{u^2}{r^2} + \ldots\ldots$$

Man suche nun das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-2xur+uurr)}.\sqrt{(1-\frac{2xu}{r}+\frac{uu}{rr})}}$$

Um dasselbe zu finden, setze man

$$1-2xur+uurr=yy$$

so reducirt sich voriger Ausdruck auf diesen

$$\int \frac{dy}{u\sqrt{(1-uu)(rr-r)+yy}}.$$

Hiervon ist bekanntlich das Integral

$$Const-\frac{1}{u}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y}{\sqrt{(1-uu)(rr-1)}}\\ +\sqrt{\dfrac{yy+(1-uu)(rr-1)}{(1-uu)(rr-1)}}\end{array}\right\}.$$

Für $x=+1$ wird dasselbe, da dann $x=1-ur$

$$Const-\frac{1}{u}\,log\frac{(1-u)(1+r)}{\sqrt{(1-uu)(rr-1)}}$$

und für $x=-1$ erhält es den Werth

$$Const-\frac{1}{u}\,log\frac{(1+u)(1+r)}{\sqrt{(1-uu)(rr-1)}}$$

folglich findet man das Integral zwischen den Gränzen $x=-1$ und $x=+1$

$$=\frac{1}{u}\,log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$=2+\frac{2u^2}{3}+\frac{2u^4}{5}+\frac{2u^6}{7}+\ldots$$

welcher Ausdruck von r völlig unabhängig ist.

§. 327.

Man findet aber dasselbe Integral, indem man statt der Radicalgrössen die entwickelten Reihen setzt

$$\int dr.\,(1+\sqrt{a'}\,\Psi' ur+\sqrt{a''}\,\Psi'' u^2r^2+\ldots.)$$

$$\asymp(1+\sqrt{a'}\,\Psi'\frac{u}{r}+\sqrt{a''}\,\Psi''\frac{u^2}{r^2}+\ldots.)$$

Führt man die Multiplication der Reihen wirklich aus, so sieht man, dass sich das Product in drei durch Addition verbundene unendliche Reihen zerlegen lässt, von denen die eine gar kein r enthält; diese wird, indem man die Integrationen ebenfalls zwischen den Gränzen $x = -1$ und $x = +1$ ausführt

$$2 + a' \int \Psi'^2 dx . uu + a'' \int \Psi''^2 dx\, u^4 + \ldots\ldots$$

Die beiden andern Reihen schreiten sowohl nach den positiven als nach den negativen Potenzen von r fort, und die einzelnen Potenzen werden die Coefficienten von der Form

$$\sqrt{a^{(m)}\, a^{(n)}} \int \Psi^{(m)} . \Psi^{(n)} dx$$

haben, wo m und n zwei von einander verschiedene Zahlen bedeuten.

§. 328.

Vergleicht man diese beiden Entwickelungen eines und desselben Integrals mit einander, so sieht man, dass

$$a' \int \Psi'^2 dx = \tfrac{2}{3}$$
$$a'' \int \Psi''^2 dx = \tfrac{2}{5}$$
$$a''' \int \Psi'''^2 dx = \tfrac{2}{7}$$

und allgemein genommen

$$a^{(m)} \int \Psi^{(m)2} . dx = \frac{2}{2m+1}$$

seyn wird. Ferner ist einleuchtend, dass, da beide Ausdrücke für alle Werthe von r und u einander gleich seyn müssen, das Integral

$$\int \Psi^{(m)} . \Psi^{(n)} dx = 0$$

verden wird, was auch m und n bedeuten mögen. Es wird daher auch das Integral

$$\int \Psi^{(m)} . dx = 0.$$

§. 329.

Man hat aus §. 317., indem $\sin\psi = x$ gesetzt wird $L^{(m)} = \int N^{(m)}\, T_m . dx$

wo das Integral von $x = -1$ bis $x = +1$ genommen werden muss. Ferner war aus demselben Paragraph $N^{(m)} = \int \varrho . r^{m+2} dr$

und wenn man hierin statt r und dr ihre durch q ausgedrückten Werthe

$$r = q(1-6\theta), \qquad dr = dq(1-6\theta).$$

substituirt, so kommt

$$N^{(m)} = (1-6\theta)^{m+3} \int \rho . q^{m+2} dq.$$

Die Dichtigkeit ρ muss als Function von q gegeben seyn, und das Integral von $q = 0$ bis zu demjenigen Werthe von q genommen werden, welcher in unserm vorliegenden Falle, der äussersten Schicht des anziehenden Körpers entspricht. Setzt man daher das zwischen den besagten Gränzen genommene Integral

$$\int \rho . q^{m+2} dq = Q^{(m)}$$

so ist $Q^{(m)}$ eine constante Grösse, und man hat

$$N^{(m)} = (1-6\theta)^{m+3} . Q^{(m)}.$$

§. 330.

In §. 322. haben wir gezeigt, dass

$$T_{(m)} = a^{(m)} M^{(m)} \Psi^m$$

folglich wenn wir diese Werthe von $T_{(m)}$ und $N^{(m)}$ in den Ausdruck von $L^{(m)}$ substituiren, so wird

$$L^{(m)} = a^{(m)} . M^{(m)} . Q^{(m)} \int (1-6\theta)^{m+3} . \Psi^{(m)} dx$$

$$= -a^{(m)} M^{(m)} Q^{(m)} 6(m+3) \left\{ \begin{array}{l} \int \theta . \Psi^{(m)} dx \\ -6 \frac{m+2}{2} \int \theta^2 \Psi^{(m)} dx \\ +6^2 \frac{m+2 . m+1}{2 . 3} \\ \int \theta^3 \Psi^{(m)} dx - \ldots . \end{array} \right.$$

indem man $(1-6\theta)^{m+3}$ entwickelt, und bemerkt, dass das erste Integral $\int \Psi^{(m)} dx = 0$ wird.

§. 331.

Nehmen wir die Gleichung der Oberfläche §. 321.

$$c = \int r' r' \cos \psi'^2 + \frac{2\pi}{r'} \left(L + \frac{L'}{r'} + \frac{L''}{r'r'} + \ldots \right)$$

so können wir statt r' den Werth $q'(1-6\theta)$ sub-

üren, wo q' den für die Oberfläche geltenden rth von q bedeutet, und θ' dieselbe Function von ψ' ist, als θ von $\sin\psi$; dann kommt, mit Verlässigung der das Quadrat übersteigenden Potenvon δ

$$= fq'q'^{2}(1-2\delta\theta'+6\delta\theta'^{2})\cos\psi'^{2}$$
$$+2\pi\left(\frac{L}{q'}+\frac{L'}{q'q'}+\frac{L''}{q'^{3}}+\ldots\ldots\right)$$
$$+2\pi\delta\,\theta'\left(\frac{L}{q'}+\frac{2L'}{q'q'}+\frac{3L''}{q'^{3}}+\ldots\ldots\right)$$
$$+2\pi\delta^{2}\theta'^{2}\left(\frac{L}{q'}+\frac{2.3L'}{q'q'}+\frac{3.4.L'''}{q'^{3}}+\ldots\ldots\right).$$

Die Grössen L', L'', L''' . . . . haben alle den or δ, und lassen sich aus der allgemeinen Formel $L^{(m)}$ des vorigen Paragraphs angeben. Um aber ler L° zu haben, bemerke man, dass §. 317., $\int N dx$, und da (§. 329.) indem man $m=0$ setzt,

$$N = (1-6\theta)^{3}\int\rho.\,qqdq$$
$$= (1-3\delta\theta+3\delta\delta\theta\theta)\,Q^{\circ}$$

at man zwischen den Gränzen $x=-1$ und $+1$

$$L = 2Q^{\circ} - 3\delta Q^{\circ}\int\theta\,dx + 3\delta\delta Q^{\circ}\int\theta\theta\,dx.$$

Man setze nun $Q^{(m)} = q^{(m)}\,q'^{m+3}$, so wird

$$= 2q^{\circ}\,q'^{3}\left[1-\tfrac{1}{2}\delta\int\theta\,dx+\tfrac{3}{2}\delta\delta\int\theta\theta.\,dx\right]$$

$$= -a^{(m)}M^{(m)}q^{(m)}q'^{m+3}\delta(m+3)\left\{\begin{matrix}\int\theta.\ \Psi^{(m)}\\ -\delta\dfrac{m+2}{2}\\ \int\theta\theta.\Psi^{(m)}dx+.\end{matrix}\right\}$$

§. 332.

Um diese Ausdrücke noch etwas abzukürzen, ne man

$$3q^{\circ}\int\theta.\ dx = a$$
$$3q^{\circ}\int\theta\theta.\,dx = b$$
$$a^{(m)}q^{(m)}(m+3)\int\theta.\ \Psi^{(m)}dx = \mathfrak{A}^{(m)}.$$

[illegible]

$$[illegible] \frac{[illegible] \; m+2}{[illegible] \; 2} \int \theta\theta . \, \Psi^{m} \, dx = \mathfrak{B}^{(m)}$$

[illegible] vorige Formeln

$$[illegible] = [illegible] \, (\mathfrak{A}^{(m)} - 6a + 566).$$

$$[illegible] = -[illegible] \, 6 \, q^{m+3} \, (\mathfrak{A}^{(m)} - 6\mathfrak{B}^{(m)}).$$

[illegible] diese Werthe in die Gleichung [illegible], dividirt die ganze Gleichung [illegible], und setzt

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = k, \qquad \frac{f}{2\pi} = g$$

[illegible], indem man die das Quadrat von 6 über[illegible] weglässt,

$$[illegible] \, (1 - 26\theta' + 66\theta'\theta')$$
$$+ [illegible] \, (1 + [illegible] + \theta'^2 6'^2)$$
$$- [illegible] + M\mathfrak{A} + M'\mathfrak{A}' + M''\mathfrak{A}'' + \ldots)$$
$$+ [illegible] + M\mathfrak{B} + M'\mathfrak{B}' + M''\mathfrak{B}'' + \ldots)$$
$$- [illegible] + 2M'\mathfrak{A}' + 3M''\mathfrak{A}'' + 4M'''\mathfrak{A}''' + \ldots)$$

§ [illegible]

[illegible] abhängende Grösse g [illegible] sie der Grösse 6 pro[illegible]. Beschränken wir uns dann blos auf [illegible], so wird vorige Gleichung in [illegible]

$$\theta = \frac{k - 2q^\circ - g\cos\psi^2}{2q^\circ 6} + \frac{a + \Psi'\chi' + \Psi''\chi'' + \Psi'''\chi''' + \ldots}{2q^\circ}.$$

Es ist ferner aus §. 322.

$\Psi'' = \sin\psi^2 - \frac{1}{3}$

lglich kann man auch für $\cos\psi^2$, $\frac{2}{3} - \Psi''$ setzen, dass

$$\theta = \frac{k - 2q^\circ - \frac{2}{3}g}{2q^\circ 6} + \frac{a + \Psi'\chi' + \Psi'''\chi''' + \ldots}{2q^\circ} + \frac{\chi''6 + g}{2q^\circ 6}.\ \Psi''$$

erden wird.

§. 334.

Bemerkt man nun, dass nach §. 328.

$$\int \Psi^{(m)2} dx = \frac{1}{a^{(m)}} \cdot \frac{2}{2m+1} \quad \text{und}$$

$$\int \Psi^{(m)}.\ \Psi^{(n)}\, dx = 0, \quad \text{so wie auch}$$

$$\int \Psi^{(m)}\, dx = 0$$

ird, so erhält man das Integral

$$\int \theta dx = \frac{k - 2q^\circ - \frac{2}{3}g + a6}{q^\circ 6}.$$

Auf gleiche Weise findet man noch

$$\int \theta.\ \Psi'\, dx = \frac{\chi'}{2q^\circ}.\int \Psi'^2\, dx$$

$$\int \theta.\ \Psi''\, dx = \frac{\chi''6 + g}{2q^\circ 6}.\int \Psi''^2\, dx$$

$$\int \theta.\ \Psi'''\, dx = \frac{\chi'''}{2q^\circ}.\int \Psi'''^2\, dx$$

$$\int \theta.\ \Psi^{IV}\, dx = \frac{\chi^{IV}}{2q^\circ}.\int \Psi^{IV\,2}\, dx$$

etc. etc. etc.

Setzt man nun statt der vor dem Gleichheitszeichen stehenden Integrale ihre Werthe aus §. 332. und an die Stelle der hinter demselben befindlichen, die so eben angegebenen Werthe, so kommt

$$\frac{\mathfrak{A}'}{4q'} = \frac{\mathfrak{A}'}{3q^\circ}; \quad \frac{\mathfrak{A}''}{q''} = \frac{\mathfrak{A}''6 + g}{q^\circ 6};$$
$$\frac{\mathfrak{A}'''}{6q'''} = \frac{\mathfrak{A}'''}{7q^\circ}; \quad \frac{\mathfrak{A}^{\mathrm{IV}}}{7q^{\mathrm{IV}}} = \frac{\mathfrak{A}^{\mathrm{IV}}}{9q^\circ};$$

etc. etc. etc.

und wir müssen aus diesen Gleichungen schliessen, dass

$$\mathfrak{A}' = 0, \quad \mathfrak{A}''' = 0, \quad \mathfrak{A}^{\mathrm{IV}} = 0, \text{ etc. etc. . .}$$

seyn muss, und blos der Coefficient $\mathfrak{A}''$ einen bestimmten Werth erhält, der sich aus der Gleichung

$$\mathfrak{A}'' q^\circ 6 = \mathfrak{A}'' 6 q'' + g q''$$

finden lässt. Man erhält aus derselben

$$\mathfrak{A}'' = \frac{g\, q''}{(q^\circ - q'')\, 6}.$$

§. 335.

Substituirt man diese Werthe von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$,... in die Gleichung (§. 333.)

$$\theta' = \frac{k - 2q^\circ - g\cos\psi'^2}{2q^\circ 6}$$

$$+ M''\mathfrak{A}' + M'''\mathfrak{A}'' + M^{\mathrm{IV}}\mathfrak{A}''' +$$

ugedrückt werden kann, so wird, indem man beide Werthe einander gleich setzt

$$\frac{a6}{3} = k - 2q^0 - \tfrac{2}{3}g + a6$$

olglich auch

$$\frac{a}{2q^0} = \frac{6q^0 + 2g - 3k}{4q^0 6}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung, elche θ' angiebt, so erhält man

$$6\theta' = \frac{2q^0 + 2g\ sin\ \psi'^2 - k}{4q^0} + \frac{M''gq''}{2q^0(q^0 - q'')}.$$

Um die Grösse k zu bestimmen, bemerke man, ass für $\psi' = 0$, θ' auch gleich Null seyn muss, da der Gleichung $r' = q'(1 - 6\theta')$, q' der für $\psi' = 0$ att findende Werth von r' ist. Man hat

$$M'' = sin\ \psi'^2 - \tfrac{1}{3}$$

so für $\psi' = 0$, $M'' = -\frac{1}{3}$; und zur Bestimmung on k erhält man die Gleichung

$$0 = \frac{2q^0 - k}{4q^0} - \frac{\frac{1}{3}g\,q''}{2q^0(q^0 - q'')}.$$

ieht man diese Gleichung von der obern ab, um k a eliminiren, und bemerkt, dass $M'' + \frac{1}{3} = sin\ \psi'^2$ t, so kommt

$$6\theta' = \tfrac{1}{3}.\ \frac{g}{q^0 - q''}\ sin\ \psi'^2.$$

Setzen wir also der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{3}g = h(q^0 - q'')$$

wird $6\theta = h\ sin\ \psi'^2$, und

$$r' = q'(1 - h\ sin\ \psi'^2)$$

elches die Gleichung der Oberfläche ist.

§. 336.

Man sieht hieraus, dass wenn man blos die erste e der Centrifugalkraft betrachtet, die Oberfläche Körpers, der aus concentrischen ähnlichen en besteht, und von einer sehr dünnen Schicht lüssigen Materie bedeckt ist, von der eines hen Sphäroïds nicht unterschieden ist; d

Abplattung desselben wird durch die Grösse h ausgedrückt.

Wir wollen nun aber noch die zweite Potenz der Centrifugalkraft oder der ihr ähnlichen Grösse mit in Betracht ziehen, und sehen in wie fern dadurch eine Abweichung von dem elliptischen Sphäroïd sich ergiebt. Setzt man statt $\sin \theta'^2$ in dem Ausdruck von $b\theta'$ seinen Werth $M'' + \frac{1}{2}$, so hat man

$$b\theta' = h\,(M'' + \tfrac{1}{2})$$

also allgemein, indem man M' in Ψ'' verwandelt

$$b\theta' = h\,(\Psi'' + \tfrac{1}{2})$$

und wir wollen annehmen, es sey mit Berücksichtigung der zweiten Potenz von f

$$b\theta = h\,(\Psi'' + \tfrac{1}{2}) - \varkappa,$$

wo $\varkappa$ die dem Quadrate von f proportionalen Glieder enthält. Da nun §. 332

$$3c' \int \theta\, dx = 0$$

so wird auch

$$bc = 3c' \left[\int h\,(\Psi'' + \tfrac{1}{2})\, dx - \int \varkappa\, dx\right]$$

$$= 3c' \left[\frac{-2h}{3} + \int \varkappa\, dx\right]$$

und eben so §. 332

$$b\theta\varkappa = 3c' \int b\theta\theta\varkappa\, dx$$

$$= 3c' \int hh\,(\Psi'' + \tfrac{1}{2})^2\, dx.$$

§. 337

$\int(\Psi'' + \frac{1}{5})^2\, dx = \frac{8}{5}$, folglich wird
$66\mathfrak{b} = \frac{8}{5}\, q^{\circ}\, hh.$

§. 338.

Man erhält ferner aus §. 332.

$$6\mathfrak{A}' = 4a'\ q'\ \int 6\theta.\ \Psi'\ dx,$$
$$6\mathfrak{A}'' = 5a''\ q''\ \int 6\theta.\ \Psi''\ dx,$$
$$6\mathfrak{A}''' = 6a'''\ q'''\ \int 6\theta.\ \Psi'''\ dx,$$
$$6\mathfrak{A}^{\text{IV}} = 7a^{\text{IV}}\ q^{\text{VI}}\ \int 6\theta.\ \Psi^{\text{IV}}\ dx,$$

etc. etc. etc.

wenn man hierin den Werth von $6\theta = h(\Psi'' + \frac{1}{5}) + u$ tituirt, und die Integrale zwischen den Gränzen -1 bis $x = +1$ nimmt

$$6\mathfrak{A}' = 4a'\ q'\ \int u\ \Psi'\ dx,$$
$$6\mathfrak{A}'' = 5a''\ q''\ \int u\ \Psi''\ dx + 2hq'',$$
$$6\mathfrak{A}''' = 6a'''\ q'''\ \int u\ \Psi'''\ dx,$$
$$6\mathfrak{A}^{\text{IV}} = 7a^{\text{IV}}\ q^{\text{IV}}\ \int u\ \Psi^{\text{IV}}\ dx,$$

etc. etc. etc.

§. 339.

Aus demselben Paragraph hat man noch

$$66\mathfrak{B}' = 6a'\ q'\ \int 66\theta\theta.\ \Psi'\ dx,$$
$$66\mathfrak{B}'' = 10a''\ q''\ \int 66\theta\theta.\ \Psi''\ dx,$$
$$66\mathfrak{B}''' = 15a'''q'''\ \int 66\theta\theta.\ \Psi'''dx,$$
$$66\mathfrak{B}^{\text{IV}} = 21a^{\text{IV}}\ q^{\text{IV}}\ \int 66\theta\theta.\ \Psi^{\text{IV}}\ dx,$$
$$66\mathfrak{B}^{\text{V}} = 28a^{\text{V}}\ q^{\text{V}}\ \int 66\theta\theta.\ \Psi^{\text{V}}\ dx,$$

etc. etc. etc.

etzt man hierin statt $66\theta\theta$ seinen Werth (§. 337.)

$hh\ (\Psi'' + \frac{1}{5})^2$

was dasselbe ist

$hh\,(\Psi^{\text{IV}} + \frac{2}{7}\Psi'' + \frac{1}{35})$

integrirt von $x = -1$ bis zu $x = +1$, so kommt

$$66\mathfrak{B}' = 0$$
$$66\mathfrak{B}'' = \frac{2}{7}\, q''hh.$$
$$66\mathfrak{B}''' = 0$$
$$66\mathfrak{B}^{\text{IV}} = \frac{1}{35}\, q^{\text{IV}}\, kh.$$
$$66\mathfrak{B}^{\text{V}} = 0$$
$$66\mathfrak{B}^{\text{VI}} = 0$$

etc. etc. etc.

§ 340.

Für Genauigkeit für k (§ 332.) wenn man s
der benannten Werthe M', M'', M''' etc. die all
nommen Ψ', Ψ'', Ψ''' gesetzt werden, und zugleich
$\frac{1}{2} - z$ genommen wird, indem man
$\cos$ das Glied $\frac{1}{24} g \cos z^2$, so wie die R

$$\ldots \mathfrak{L}\Psi'\Sigma' - 4M''\Sigma'' + 5M^{IV}\Sigma^{IV} + \ldots)$$

vorgenommen werden müssen, da beide dem C
von z oder g proportional sind,

$$\begin{aligned} k = g\,&\tfrac{1}{2} - \Psi'' \quad 1 - \tfrac{1}{2}\Psi' \\ &- \tfrac{1}{2}\Psi'' \,(1 - \tfrac{1}{2}\Psi' + \tfrac{1}{6}\Psi'') \\ &- \tfrac{1}{6}\,z - \tfrac{1}{2}\Psi'\Sigma' + \tfrac{1}{2}\Psi''\Sigma'' + \Psi'''\Sigma''' + \ldots \\ &- \tfrac{1}{24}\,z - \tfrac{1}{2}\Psi''\Sigma'' + \tfrac{1}{2}\Psi''\Sigma'' + \Psi'''\Sigma''' + \ldots \\ &- \tfrac{1}{120}\,z - \tfrac{1}{2}\Psi''\Sigma'' + \ldots). \end{aligned}$$

§ 341.

Nun ist aber $\S$ 330.

$$1 - \tfrac{1}{2}\Psi' = 1 - \tfrac{1}{2}z\,\Psi'' - \tfrac{1}{2}k - 2s$$

Ferner auch

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} - \Psi'' \quad &\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\Psi' \\ = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}s &+ \tfrac{1}{2}z\,\Psi'' \\ - \Psi'' \,(1 - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}s). \end{aligned}$$

oder wenn man statt Ψ'' seinen Werth

$$\Psi'' = \tfrac{1}{2}\Psi'^2 + \tfrac{1}{12}\Psi'^4 + \ldots$$

der sich aus dem Vorigen leicht finden lässt, s

§. 342.

Mit Zuziehung der gefundenen Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ .... ergiebt sich noch

$$
\begin{aligned}
&6\mathfrak{a} + \Psi' 6\mathfrak{A}' + \Psi'' 6\mathfrak{A}'' + \Psi''' 6\mathfrak{A}''' + \ldots \\
&= 2h\mathfrak{q}^\circ + 3\mathfrak{q}^\circ \int u\,dx + 2h\mathfrak{q}''\,\Psi'' \\
&\quad + 4a'\,\mathfrak{q}'\,\Psi' \int u\,\Psi'\,dx \\
&\quad + 5a''\,\mathfrak{q}''\,\Psi'' \int u\,\Psi''\,dx \\
&\quad + 6a'''\mathfrak{q}'''\Psi''' \int u\,\Psi'''\,dx \\
&\quad + \text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&66\mathfrak{b} + \Psi' 66\mathfrak{B}' + \Psi'' 66\mathfrak{B}'' + \Psi''' 66\mathfrak{B}''' + \ldots \\
&\quad = hh\left(\tfrac{6}{5}\,\mathfrak{q}^\circ + \tfrac{24}{7}\,\Psi''\mathfrak{q}'' + \tfrac{14}{5}\,\Psi^{\text{IV}}\mathfrak{q}^{\text{IV}}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&6\theta\,(6\mathfrak{a} + 3\Psi'' 6\mathfrak{A}'') \\
&\quad = 6\theta\,(2h\,\mathfrak{q}^\circ + 6\mathfrak{q}''\,h\,\Psi'') \\
&\quad = 2hh\,(\Psi'' + \tfrac{1}{3})\,(\mathfrak{q}^\circ + 3\mathfrak{q}''\,\Psi'') \\
&\quad = 2hh \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{q}^\circ + \tfrac{4}{15}\,\mathfrak{q}'' \\ + \Psi''(\mathfrak{q}^\circ\,\tfrac{11}{7}\,\mathfrak{q}'') \\ + 3\mathfrak{q}''\,\Psi^{\text{IV}} \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

§. 343.

Substituirt man nun alle diese Werthe in die leichung, welche k ausdrückt, so wird

$$
\begin{aligned}
k &= \tfrac{2}{3}\,g - \tfrac{4}{15}\,hg + 2\mathfrak{q}^\circ + \tfrac{2}{5}\,h\mathfrak{q}^\circ \\
&\quad + 2u\,\mathfrak{q}^\circ + \tfrac{2}{5}\,hh\,\mathfrak{q}^\circ - 2h\,\mathfrak{q}^\circ \\
&\quad + \tfrac{6}{5}\,hh\,\mathfrak{q}^\circ - \tfrac{2}{3}\,hh\,\mathfrak{q}^\circ - \tfrac{6}{15}\,hh\,\mathfrak{q}'' \\
&+ \Psi'' \left\{ \begin{array}{l} 2h\mathfrak{q}^\circ + \tfrac{12}{7}\,hh\,\mathfrak{q}^\circ - g - \tfrac{2}{7}\,hg \\ \quad - 2h\,\mathfrak{q}'' + \tfrac{24}{7}\,hh\,\mathfrak{q}'' \\ \quad - 2hh\,\mathfrak{q}^\circ + \tfrac{22}{7}\,hh\,\mathfrak{q}'' \end{array} \right\}. \\
&+ \Psi^{\text{IV}} \left\{ \begin{array}{l} 2hg + 2\mathfrak{q}^\circ hh + \tfrac{14}{5}\,\mathfrak{q}^{\text{IV}} hh \\ \quad - 6\mathfrak{q}''\,hh \end{array} \right\} \\
&\quad - 3\mathfrak{q}^\circ \int u\,dx \\
&\quad - 4a'\,\mathfrak{q}'\,\Psi' \int u\,\Psi'\,dx \\
&\quad - 5a''\,\mathfrak{q}''\,\Psi'' \int u\,\Psi''\,dx \\
&\quad - 6a'''\mathfrak{q}'''\Psi''' \int u\,\Psi'''\,dx \\
&\quad - 7a^{\text{IV}}\,\mathfrak{q}^{\text{IV}}\,\Psi^{\text{IV}} \int u\,\Psi^{\text{IV}}\,dx \\
&\quad - \text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

Alle Integrale $\int u\,dx$, $\int u\,\Psi'\,dx$ u. s. w. kann man s constante Grössen betrachten, so dass sich aus eser Gleichung

$$u = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}'\Psi' + \mathfrak{D}''\Psi'' + \mathfrak{D}'''\Psi''' + \ldots.$$

geben würde. Es findet sich daher

Der Kürze wegen nehme man

$$\frac{5q'' - 3q^0 - \frac{7}{3}q^{IV}}{q^0 - \frac{7}{9}q^{IV}} = -\varepsilon$$

so wird

$$u = \tfrac{1}{2} hh(1+2\varepsilon)\ sin\psi^2 - \varepsilon hh.\ sin\psi^4.$$

§. 346.

In §. 336. hatten wir angenommen, es soll

$$6\theta = h\ sin\psi^2 + u$$

seyn; es wird daher der Werth von 6θ bis zur zweiten Potenz der Centrifugalkraft inclusive

$$6\theta = h\ sin\psi^2 + \tfrac{1}{2} hh(1+2\varepsilon)\ sin\psi^2 - \varepsilon hh\ sin\psi^4.$$

Nimmt man $\psi = 90°$, so giebt der daraus hervorgehende Werth von 6θ den Unterschied des Halbmessers des Aequators und der halben Erdaxe, dividirt durch den Halbmesser des Aequators, an, welcher Quotient die Abplattung ist, die wir durch α bezeichnen wollen. Man hat daher

$$\alpha = h + hh.\ \frac{3-\varepsilon}{7}$$

also auch umgekehrt

$$h = \alpha - \alpha\alpha.\ \frac{3-\varepsilon}{7}$$

$$hh = \alpha\alpha.$$

Substituirt man diese Werthe h und hh in die Gleichung, welche 6θ ausdrückt, so ergiebt sich

$$6\theta = \alpha\ sin\psi^2 + \varepsilon\alpha\alpha\ sin\psi^2\ cos\psi^2$$

also da $r' = q'(1 - 6\theta')$, so erhält man die Gleichung der Oberfläche

$$r' = q'(1 - \alpha\ sin\psi'^2 - \varepsilon\alpha\alpha\ sin\psi'^2\ cos\psi'^2).$$

§. 347.

Dieser Ausdruck weicht von der Gleichung des elliptischen Sphäroïds in der zweiten Potenz der Abplattung ab; denn bezeichnet man durch q' die halbe grosse Axe desselben, durch α seine Abplattung, so ist

$$r' = \frac{q'(1-\alpha)}{\sqrt{[1-(2\alpha-\alpha\alpha)\ cos\psi'^2]}},$$

ler wenn man diesen Werth bis zur zweiten Po-
nz der Abplattung entwickelt

$$r' = q'[1 - \alpha \sin\psi'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin\psi'^2 \cos\psi'^2],$$

nd man sieht aus der Vergleichung dieses Ausdrucks
it dem vorigen, dass nur in dem Falle, wenn $\varepsilon = \frac{1}{2}$
ird, die Oberfläche ein elliptisches Sphäroïd ist. Es
uss daher wenn man statt ε seinen Werth aus
344. setzt

$$\tfrac{1}{2} = \frac{3q^0 - 5q'' + \frac{7}{3}q^{IV}}{q^0 - \frac{7}{3}q^{IV}}$$

erden, oder

$$3q^0 + 7q^{IV} = 10q''.$$

Nun ist aber aus §. 331.

$$q^0\ q^3 = \int\rho.\ qqdq$$
$$q''\ q^5 = \int\rho.\ q^4dq$$
$$q^{IV}\ q^7 = \int\rho.\ q^6dq$$

glich wenn man diese Werthe in die Gleichung

$$3q^0 + 7q^{IV} = 10q''$$

stituirt, so erhält man

$$3q^4.\int\rho.\ qqdq + 7\int\rho.\ q^6dq = 10qq.\int\rho.\ q^4dq$$

id man sieht leicht, dass dieser Gleichung Genüge
leistet werden wird, wenn man die Dichtigkeit ρ
nstant annimmt. Dann wird nämlich

$$\int\rho.\ pqdq = \tfrac{1}{5}\rho q^5$$
$$\int\rho.\ q^4dq = \tfrac{1}{5}\rho q^5$$
$$\int\rho.\ q^6dq = \tfrac{1}{7}\rho q^7$$

id die Gleichung selbst reducirt sich auf $1 + 1 = 2$.

§. 348.

Dass die Bedingung der constanten Dichtigkeit
n Innern des Körpers der einzige Fall ist, in wel-
nem ein aus ähnlichen Schichten bestehender und
uf der Oberfläche mit einer sehr dünnen Schicht
ner Flüssigkeit bedeckter Körper, die Gestalt eines
liptischen Sphäroïds anzunehmen im Stande ist, lässt
ch leicht beweisen. Man differentiire die für die-
n Fall gefundene, allgemeine Bedingungsgleichung

$$3q^4\int\rho.\ qqdq + 7\int\rho.\ q^6dq = 10qq\int\rho.\ q^4dq$$

so erhält man, mit Weglassung der sich aufhebe den Glieder

$$3qq \int \rho . qqdq = 5 \int \rho . q^4 dq.$$

Dies von neuem differentiirt, giebt

$$3 \int \rho . qqdq = \rho q^3$$

und hieraus folgt durch eine dritte Differentiation

$$q^3 d\rho = 0,$$

also $d\rho = 0$, und $\rho =$ einer constanten Grösse.

§. 349.

Wir wollen nun das Gesetz der Schwere an d Oberfläche des gefundenen Körpers aufsuchen. D nach den drei Axen zerlegten Seitenkräfte der A ziehung werden (§. 319. §. 320.) durch

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) + 2f\xi, \quad \left(\frac{dV}{d\eta}\right) + 2f\eta, \quad \left(\frac{dV}{d\zeta}\right),$$

ausgedrückt, und um die vollständige Anziehung einen Punkt der Oberfläche zu erhalten, muss m bekanntlich die drei Seitenkräfte ins Quadrat erheb die Quadrate zusammenaddiren, und aus der Summ die Wurzel ziehen. Bezeichnet man also die Schwe re an der Oberfläche durch G, so wird

$$GG = \left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right)^2 + 4f\left[\xi . \left(\frac{dV}{d\xi}\right) + \eta \left(\frac{dV}{d\eta}\right)\right] + 4ff(\xi\xi + \eta\eta).$$

§. 350.

Aus §. 307. haben wir die Gleichungen

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cos\varphi' \cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\sin\varphi'}{r' \cos\psi'} - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\cos\varphi' \sin\psi}{r'}$$

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\varphi'^2 \cos\psi'^2 + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\sin\varphi'}{r' \cos\psi'} - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\sin\varphi' \sin\psi'}{r'}$$

$$\left(\frac{dV}{d\zeta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\psi' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\cos\psi}{r'}$$

dass man also die im Ausdruck von G vorkommenden partiellen Differentialen $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\eta}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)$, durch die andern $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)$, setzen kann.

Man wird nun aber sehen, dass im Werthe von V der Winkel φ' gar nicht mit vorkommt, folglich hat man $\left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) = 0$

und dem Winkel φ' selbst kann man irgend einen beliebigen Werth geben, ohne dadurch die Allgemeinheit der Resultate zu stören. Wir setzen denselben daher gleich Null, so dass $\sin\varphi' = 0$, $\cos\varphi' = 1$ wird. Durch diese Voraussetzungen erhält man

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\sin\psi'}{r'}$$

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dV}{d\zeta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\psi' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\cos\psi'}{r'}.$$

Es wird also die Summe

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right)^2 = \left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'r'}.$$

Ferner hat man aus §. 307., unter der Voraussetzung dass $\varphi' = 0$ sey

$$\xi = r' \cos\psi', \quad \eta = 0,$$

folglich auch

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\frac{\xi}{r} + \left(\frac{dV}{d\eta}\right)\frac{\eta}{r}$$

$$= \left(\frac{dV}{dr}\right)r\cos\psi^2 - \left(\frac{dV}{d\psi}\right)\sin\psi\cos$$

$$\xi\xi + \eta\eta = r^2\cos\psi^2.$$

Der Werth von $\Omega\Omega$ lässt sich daher ver
der neuen partiellen Differentialien von V au
gendermassen ausdrücken.

$$\Omega\Omega = \left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \frac{1}{r'r'}$$

$$+ 4f\left[\left(\frac{dV}{dr'}\right)r'\cos\psi^2 - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\sin\psi'\cos\right.$$

$$+ 4ff\,r'r'\cos\psi^2.$$

§. 351.

Wir müssen nun zur Darstellung des Aus
von $\frac{1}{\Omega}$ als Function von r' und ψ' übergehen.
diesem Zweck haben wir aus §. 320. die Reihe

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{1}{r'}\left[1 + \frac{L'}{r'^1} + \frac{L''}{r'^2} + \frac{L'''}{r'^3} + \ldots\right].$$

Hier ist $L^{(i)}$

$$\int u\,\Psi'\,dx = 0$$
$$\int u\,\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\,\mathfrak{D}''$$
$$\int u\,\Psi'''\,dx = 0$$
$$\int u\,\Psi^{IV}\,dx = \frac{2}{9a^{IV}}\,\mathfrak{D}^{IV}$$
$$\int u\,\Psi^{V}\,dx = 0$$
$$\int u\,\Psi^{VI}\,dx = 0. \text{ etc. etc. etc.}$$

wird daher

$$6\mathfrak{A}' = 0$$
$$6\mathfrak{A}'' = 2q''(\mathfrak{D}'' + h)$$
$$6\mathfrak{A}''' = 0$$
$$6\mathfrak{A}^{IV} = \tfrac{1}{5}\,q^{IV}\,\mathfrak{D}^{IV}$$
$$6\mathfrak{A}^{V} = 0$$
$$6\mathfrak{A}^{VI} = 0. \text{ etc. etc. etc.}$$

e Grössen $66\mathfrak{B}'$, $66\mathfrak{B}''$ u. s. w. findet man in angegeben; substituirt man diese, so wie die e $6\mathfrak{A}'$, $6\mathfrak{A}''$, in den Gleichungen für L', L'', . ., so kommt

$$L' = 0$$
$$L'' = -2M''q'^{5}q''(\mathfrak{D} + h - \tfrac{5}{6}\,hh)$$
$$L''' = 0$$
$$L^{IV} = -\tfrac{1}{5}\,M^{IV}q'^{7}q^{IV}(\mathfrak{D}^{IV} - 3hh)$$
$$L^{V} = 0$$
$$L^{VI} = 0. \text{ etc. etc. etc.}$$

as den Werth von L betrifft, der durch die ung

$$L = q'^{3}(2q^{0} - 6a + 66b)$$

nt wird, so hat man §. 356.

$$6a = 2hq^{0} + 3q^{0}\int u dx$$

(§. 343., $\int u dx = 2\mathfrak{D}$, so wird auch

$$6a = 2q^{0}(h + 3\mathfrak{D}).$$

vischen den Grössen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}^{IV}$ findet aber die Bedingungsgleichung

$$0 = \mathfrak{D} - \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{D}'' + \tfrac{3}{35}\,\mathfrak{D}^{IV}$$

folglich hat man

$$3\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'' - \tfrac{9}{35}\,\mathfrak{D}^{IV}$$
$$6a = 2q^{0}(h + \mathfrak{D}'' - \tfrac{3}{35}\,\mathfrak{D}^{IV}).$$

dlich ist noch §. 337., $66b = \frac{6}{5}\,q^{0}hh$, also

$$L = 2q'^{3}q^{0}(1 - h - \mathfrak{D}'' + \tfrac{9}{35}\,\mathfrak{D}^{IV} + \tfrac{3}{5}\,hh),$$

[illegible] statt $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}^{\text{IV}}$ ihre Werthe aus §. 344 [illegible], indem

$$\mathfrak{D}'' = \mathfrak{h}hh, \qquad \mathfrak{D}^{\text{IV}} = -\varepsilon hh$$

[illegible], so erhält man

$$L = 2\mathfrak{q}^{\text{IV}}\mathfrak{q}^{\text{V}}(1 - h + \tfrac{6}{35}hh - \tfrac{9}{35}\varepsilon hh).$$

§. 352.

Substituirt man diese Werthe von L, L', L''... in die Gleichung welche V ausdrückt, so kommt

$$V = 4\pi q'^3 \mathfrak{q}^0 (1 - h + \tfrac{6}{35}hh - \tfrac{9}{35}\varepsilon hh)\frac{1}{r'}$$
$$- 4\pi q'^5 \mathfrak{q}''(h - \tfrac{9}{7}hh)\frac{M''}{r'^3}$$
$$+ \tfrac{28}{9}\pi q'^7 \mathfrak{q}^{\text{IV}}(3 + \varepsilon)hh\frac{M^{\text{IV}}}{r'^5},$$

also wird durch Differentiation

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -4\pi q'^3 \mathfrak{q}^0 (1 - h + \tfrac{6}{35}hh - \tfrac{9}{35}\varepsilon hh)\frac{1}{r'r'}$$
$$+ 12\pi q'^5 \mathfrak{q}''(h - \tfrac{9}{7}hh)\frac{M''}{r'^4}$$
$$- \tfrac{140}{9}\pi q'^7 \mathfrak{q}^{\text{IV}}(\varepsilon + 3)hh\frac{M^{\text{IV}}}{r'^6}.$$

Führt man statt h die Abplattung α nach §. 346 ein, so kommt

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -4\pi q'^3 \mathfrak{q}^0 (1 - \alpha + \frac{3 - 2\varepsilon}{5}\alpha\alpha)\frac{1}{r'r'}$$
$$+ 12\pi q'^5 \mathfrak{q}''(\alpha - \alpha\alpha\frac{12 - \varepsilon}{7})\frac{M''}{r'^4}$$
$$- \tfrac{140}{9}\pi q'^7 \mathfrak{q}^{\text{IV}}(\varepsilon + 3)\alpha\alpha\frac{M^{\text{IV}}}{r'^6}.$$

Ferner ist §. 346.

$$r' = q'(1 - \alpha \sin\psi'^2 - \varepsilon\alpha\alpha \sin\psi'^2 \cos\psi'^2)$$

also hieraus, wenn man blos die nöthigen Glieder beibehält

$$\frac{1}{r'r'} = \frac{1}{q'q'}[1 + 2\alpha \sin\psi^2 + \varepsilon\alpha\alpha \sin\psi'^2 \cos\psi'^2$$
$$+ 3\alpha\alpha \sin\psi'^2]$$

$$\frac{1}{r'^4} = \frac{1}{q'^4}\,[1 + 4\alpha\ sin\,\psi'^2]$$
$$\frac{1}{r'^6} = \frac{1}{q'^6}.$$

Hierdurch bekommt man die Entwickelung von

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -4\pi q' q^0 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha + 2\alpha\ sin\,\psi'^2 \\ + \frac{3-2\varepsilon}{5}\,\alpha\alpha \\ - 2\alpha\alpha\ sin\,\psi'^2 \\ + \varepsilon\alpha\alpha\ sin\,\psi'^2\ cos\,\psi'^2 \end{array} \right\}$$
$$+ 12\pi q' q'' M'' \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \alpha\alpha\,\frac{12-\varepsilon}{7} \\ + 4\alpha\alpha\ sin\,\psi'^2 \end{array} \right\}$$
$$- 1\tfrac{4}{5}{}^0\pi q' q^{IV} M^{IV} (\varepsilon + 3)\,\alpha\alpha.$$

§. 353.

Auf gleiche Weise erhält man, indem man das artielle Differential von V nach ψ' nimmt, und noch it $\frac{1}{r'}$ multiplicirt, darauf statt $\frac{1}{r'^4}$, $\frac{1}{r'^6}$ ihre Werthe setzt

$$\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{1}{r'} = -4\pi q' q''\,\frac{dM''}{d\psi'} \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \alpha\alpha\,\frac{12-\varepsilon}{7} \\ + 4\alpha\alpha\ sin\,\psi'^2 \end{array} \right\}$$
$$+ 2\tfrac{2}{5}{}^8\pi q' q^{IV}\,\frac{dM^{IV}}{d\psi'}\,(\varepsilon + 3)\,\alpha\alpha.$$

Nun ist aber

$$M'' = sin\,\psi'^2 - \tfrac{1}{3}$$
$$M^{IV} = sin\,\psi'^4 - \tfrac{6}{7}\ sin\,\psi'^2 + 1\tfrac{3}{35}$$

o auch wenn man differentiirt

$$\frac{dM''}{d\psi'} = 2\,sin\,\psi'\ cos\,\psi'$$
$$\frac{dM^{IV}}{d\psi'} = 4\,cos\,\psi'\ (sin\,\psi'^3 - \tfrac{3}{7}\ sin\,\psi')$$

Beschränkt man sich auf die erste Potenz der plattung, welches in allen Fällen für die Unt

[illegible] das Gesetz der Schwere [illegible] ist, so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = -[illegible]$$

$$-[illegible] \alpha\,(\varphi^{\prime\prime} - 2\varphi^{\prime\prime} \sin\psi'^2 - \varphi' + 3\varphi' \sin\psi'^2)$$

also auch

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 - \left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2 \frac{1}{r^2}$$

$$= 16\pi^2 \varphi^2 \varphi'^2$$

$$- 32\pi^2 \varphi^2 \varphi'' \alpha(\varphi'' - \varphi' - 2\varphi'' \sin\psi'^2$$

$$- 3\varphi' \sin\psi'^2.$$

Ferner wird mit Vernachlässigung des Products [illegible]

$$4f\left[\left(\frac{dV}{dr}\right) r \cos\psi'^2 - \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \sin\psi' \cos\psi'\right]$$

$$= -16 f \pi \varphi^2 \varphi'^2 \cos\psi'^2;$$

$$4 f r' r' \cos\psi'^2 = 0.$$

Man erhält daher den Werth von GG (§. 350.)

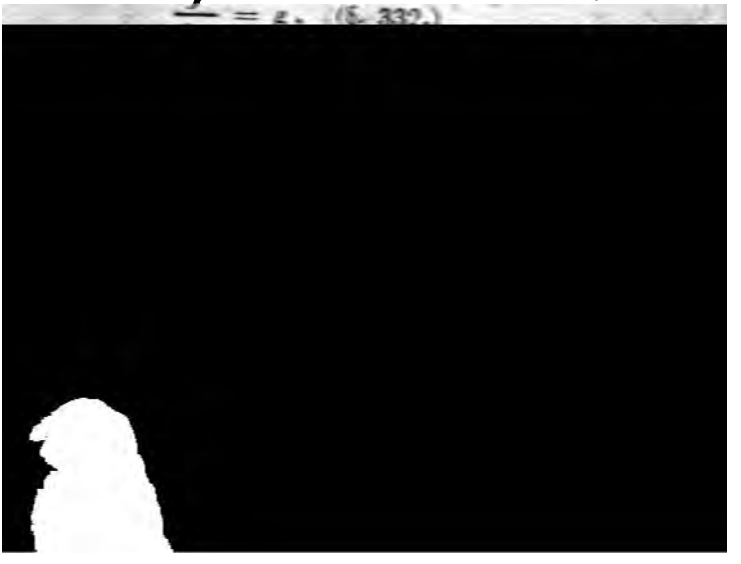
$$GG = 16\pi^2 \varphi'^2 \varphi'^2$$

$$- 32\pi^2 \varphi'' \alpha(\varphi'' - \varphi' - 2\varphi'' \sin\psi'^2 + 3\varphi'' \sin\psi'^2$$

$$+ \frac{f}{2\pi\alpha} \cos\psi'^2).$$

Um die Grösse f aus diesem Ausdruck wegzuschaffen, hat man

$$\frac{f}{\ } = g. \quad (\S.\ 332.)$$



§. 354.

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung $= GG$, und zieht dann auf beiden Seiten die Wurl aus, so kommt der Werth der Schwere

$$G = 4\pi q' \mathfrak{q}^\circ - 4\pi q' \alpha \begin{bmatrix} \mathfrak{q}^\circ (3 - 4\ sin\psi'^2) \\ -\mathfrak{q}''(3 - 5\ sin\psi'^2) \end{bmatrix}$$

Am Aequator wo $\psi' = 0$ ist, sey die Schwere G°, am Pol wo $\psi' = 90°$, sey dieselbe $= G'$, so rd

$$G^\circ = 4\pi q' \mathfrak{q}^\circ - 12\pi q' \alpha (\mathfrak{q}^\circ - \mathfrak{q}'')$$
$$G' = 4\pi q' \mathfrak{q}'' + 12\pi q' \alpha (\tfrac{1}{3}\mathfrak{q}^\circ - \tfrac{2}{3}\mathfrak{q}'').$$

tzt man $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}^\circ \delta$, so hat man

$$\frac{G}{G^\circ} = \frac{1 - \alpha(3 - 3\delta - 4 sin\psi'^2 + 5\delta\ sin\psi'^2)}{1 - 3\alpha(1 - \delta)}$$

er wenn man mit dem Nenner dividirt

$$G = G^\circ (1 + 4\alpha\ sin\psi'^2 (1 - \tfrac{2}{3}\delta)).$$

Im Fall, dass die Dichtigkeit constant ist, erhält n nach §. 347., $\delta = \frac{3}{5}$, also

$$G = G^\circ (1 + 4\alpha\ sin\psi'^2).$$

Nimmt man die Dichtigkeit als vom Mittelpunkt s abnehmend an, und zwar um den einfachsten Fall betrachten, in arithmetischer Progression, so nn man $\rho = \rho' - \gamma \frac{q}{q'}$

nehmen, wo ρ' die Dichtigkeit im Mittelpunkt, und den Unterschied der Dichtigkeiten im Mittelpunkte .d an der Oberfläche bedeutet; dann kommt

$$\int \rho.\ qqdq = \tfrac{1}{3}\rho' q'^3 - \tfrac{1}{4}\gamma q'^3$$
$$\int \varrho.\ q^4 dq = \tfrac{1}{5}\rho' q'^5 - \tfrac{1}{6}\gamma q'^6$$

glich

$$\mathfrak{q}^\circ = \tfrac{1}{3}\rho' - \tfrac{1}{4}\gamma, \qquad \mathfrak{q}'' = \tfrac{1}{5}\rho' - \tfrac{1}{6}\gamma$$

d hieraus

$$\delta = \frac{12\rho' - 10\gamma}{20\rho' - 15\gamma}.$$

Man setze dies $= \frac{3}{5} - \delta'$, so ergiebt sich

$$\delta = \frac{\gamma}{20\rho' - 15\gamma}$$

cher Ausdruck positiv ist, wenn γ einen positiven th erhält, indem $20\rho'$ immer grösser als 15γ muss, wenn man nicht eine negative Dichtigkeit

an der Oberfläche annehmen wollte, und wir können [illegible] schließen, daß γ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, wenn die Dichtigkeit nach der Oberfläche zu abnimmt. Hingegen wird γ größer als $\frac{1}{2}$, wenn die Dichtigkeit nach der Oberfläche hin zunimmt, weil dann γ als negativ betrachtet werden muß.

§. 355.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, in welchem die Lage einer aus einer tropfbaren Flüssigkeit bestehend angenommen wird. Die Gleichung für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten §. 290.

$$dp = \varrho\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

wo p den Druck, ϱ die Dichtigkeit, P, Q, R die nach den drei Axen wirkenden Kräfte bezeichnen, zeigt, daß im Allgemeinen ϱ eine Function von

$$f\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

seyn muß, wenn irgend Gleichgewicht unter der Wirkung der angenommenen Kräfte vorhanden seyn soll, weil sonst dp kein vollkommenes Differential seyn könnte. Uebrigens muß auch

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ein vollkommenes Differential einer Function der drei veränderlichen Größen ξ, τ, ζ ausmachen.

Ist daher die Dichtigkeit der Flüssigkeit nicht homogen, so wird sich dieselbe im Zustande des Gleichgewichts in Schichten theilen, auf denen eine

eichenden Körpers, der von einer sehr dünnen chicht einer Flüssigkeit überdeckt wird, konnten ir im Ausdruck von V (§. 320.) die eine nach den sitiven Potenzen von r' fortschreitende Reihe verachlässigen, da die durch Integration zu findenden efficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$. . . . Null wurden, oder wegstens wegen der unbeträchtlichen Tiefe der Flüsgkeit, als unendlich klein betrachtet werden mussn. Allein sobald wir die ganze Masse als flüssig nehmen, wie wir jetzt thun werden, ist es nöthig, ss auch der zweite Theil des Ausdrucks von V im wähnten Paragraph mit in Betracht gezogen wird, a das Gleichgewicht nicht blos bei der Oberfläche, ndern zugleich bei allen innern Theilen der Masse att finden muss. Die Gleichung des Gleichgewichts

$$V + frr\cos\psi^2 = c$$

ird daher in dem vorliegenden Falle:

$$c = fr'r'\cos\psi^2 + 2\pi\left\{\begin{array}{l}\frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^2} + \frac{L'''}{r'^3}\\ + \text{etc. etc. etc.}\\ + \mathfrak{L} + \mathfrak{L}'r' + \mathfrak{L}''r'^2\\ + \text{etc. etc. etc.}\end{array}\right\}.$$

§. 357.

Wir können nun annehmen, es sey allgemein ir jede Schicht

$$r = q(1 - s),$$

o q unabhängig vom Winkel ψ, den grössten Werth on r in der Schicht angiebt, und s eine kleine Grösse bedeutet, deren Potenzen wir vernachlässigen können. Bemerkt man nun, dass aus den §§. 317, 322 is 325.

$$\begin{aligned} L &= \int N.\,dx\\ L' &= a'\,M'\int N'\,\Psi'\,dx\\ L'' &= a''\,M''\int N''\,\Psi''\,dx\\ L''' &= a'''\,M'''\int N'''\,\Psi'''\,dx\end{aligned}$$

etc. etc. etc.

$$\begin{aligned} N &= \int\varrho.\,rrdr\\ N' &= \int\varrho.\,r^3dr\\ N'' &= \int\varrho.\,r^4dr\\ N''' &= \int\varrho.\,r^5dr.\end{aligned}$$ etc. etc. etc.

[illegible] in den letztern Integralen [illegible] gesetzt, und dann von [illegible] wird, wo q' der Schicht [illegible] einen angezogenen Punkt [illegible]

$$[illegible] = \int \rho\, q^3 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

$$[illegible] = \int \rho\, q^4 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

$$[illegible] = \int \rho\, q^5 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

$$[illegible] = \int \rho\, q^6 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

[illegible]

[illegible] Ausdrücke wer- [illegible] allein die übrigen [illegible] enthalten, da s aus- [illegible] weswegen das [illegible] ist $\left(\frac{ds}{dq}\right) dq$, um [illegible] betrachtet [illegible] wollen wir diese [illegible]

$$[illegible]$$

§. 358.

Was die Coefficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$... betrifft, so an (§. 318.)

$$\mathfrak{L} = \int \mathfrak{N}.\, dx$$
$$\mathfrak{L}' = a'\, M'\, \int \mathfrak{N}'\, \Psi'\, dx$$
$$\mathfrak{L}'' = a''\, M''\, \int \mathfrak{N}''\, \Psi''\, dx$$
$$\mathfrak{L}''' = a'''\, M'''\, \int \mathfrak{N}'''\, \Psi'''\, dx$$

etc. etc. etc.

$$\mathfrak{N} = \int \rho.\, rdr$$
$$\mathfrak{N}' = \int \rho.\, dr$$
$$\mathfrak{N}'' = \int \rho.\, \frac{dr}{r}$$
$$\mathfrak{N}''' = \int \rho.\, \frac{dr}{rr} \text{ etc. etc. etc.}$$

iese letztern Integrale aber von $q = q'$ bis zu Werthe von q, welcher der Oberfläche ent- it, genommen werden müssen, und den wir q'' bezeichnen wollen. Man sieht aber leicht, ein von $q = q'$ bis $q = q''$ genommenes Integral, ist dem Unterschiede zweier andern Integrale, lenen das eine zwischen den Gränzen $q = 0$ und $''$, das andere aber zwischen den Gränzen $q = 0$ $= q'$ enthalten ist. Bezeichnet man daher die hen $q = 0$ und $q = q''$ enthaltenen Werthe von $'$, $\mathfrak{N}''$..., durch $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$..., so wird

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} - \int \rho.\, rdr$$
$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}' - \int \rho\, dr$$
$$\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}'' - \int \rho.\, \frac{dr}{r}$$
$$\mathfrak{N}''' = \mathfrak{M}''' - \int \rho.\, \frac{dr}{rr} \text{ etc. etc. etc.}$$

etzt man in diesen Ausdrücken, statt r, $q(1-s)$, hält man

$$= \mathfrak{M} - \int \rho\, qdq + 2\int \rho\, sqdq + \int \rho \left(\frac{ds}{dq}\right) q^2 dq$$
$$= \mathfrak{M}' - \int \rho\, dq + \int \rho\, s\, dq + \int \rho \left(\frac{ds}{dq}\right) q\, dq$$
$$= \mathfrak{M}'' - \int \rho \frac{dq}{q} + \int \rho \left(\frac{ds}{dq}\right) dq$$

$$\mathfrak{X}''' = \mathfrak{M}''' - \int \rho \frac{dq}{qq} - \int \rho s \frac{dq}{qq} + \int \rho \left(\frac{ds}{dq}\right) \frac{d}{}$$

etc. etc. etc.

und wir wollen diese Werthe der Kürze weg schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \mathfrak{M} - \mathfrak{Q} + 2\mathfrak{T} + \mathfrak{U} \\
\mathfrak{X}' &= \mathfrak{M}' - \mathfrak{Q}' + \mathfrak{T}' + \mathfrak{U}' \\
\mathfrak{X}'' &= \mathfrak{M}'' - \mathfrak{Q}'' + \mathfrak{U}'' \\
\mathfrak{X}''' &= \mathfrak{M}''' - \mathfrak{Q}''' - \mathfrak{T}''' + \mathfrak{U}'''
\end{aligned}$$

etc. etc. etc.

Multiplicirt man diese Ausdrücke durch dx, Ψdx, $\Psi' dx$, $\Psi'' dx$ u. s. w. und nimmt die Integrale von $x = -1$ bis $x = +1$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E} &= 2\mathfrak{M} - 2\mathfrak{Q} + 2\int \mathfrak{T}\, dx + \int \mathfrak{U}\, dx \\
\mathfrak{E}' &= (\int \mathfrak{T}' \Psi' dx + \int \mathfrak{U}' \Psi' dx)\, a' M' \\
\mathfrak{E}'' &= a'' M'' \int \mathfrak{U}'' \Psi'' dx \\
\mathfrak{E}''' &= -(\int \mathfrak{T}''' \Psi''' dx - \int \mathfrak{U}''' \Psi''' dx)\, a''' M'
\end{aligned}$$

etc. etc. etc.

§. 359.

Diese Werthe müssen wir in die Gleichung Gleichgewichts §. 356. substituiren; diese ist, w man $c = 2\pi k$, $f = 2\pi g$, der Kürze wegen nimmt

$$k = g\, r' r' \cos \psi'^{1} + \frac{L}{} + \frac{L'}{} + \frac{L''}{} + \ldots$$

$$- \frac{3\int T\,dx + \int U\,dx}{q'}$$
$$- \frac{4\int T'\Psi'\,dx + \int U'\Psi'\,dx}{q'q'}\,a'M'$$
$$- \frac{5\int T''\Psi''\,dx + \int U''\Psi''\,dx}{q'^3}\,a''M''$$
$$- \frac{6\int T'''\Psi'''\,dx + \int U'''\Psi'''\,dx}{q'^4}\,a'''M'''$$
— etc. etc. etc.

$$+ 2\mathfrak{M} - 2\mathfrak{Q} + 2\int \mathfrak{T}\,dx + \int \mathfrak{U}\,dx$$
$$+ a'M'q'\,(\int \mathfrak{T}'\Psi'\,dx + \int \mathfrak{U}'\Psi'\,dx)$$
$$+ a''M''q''q'\int \mathfrak{U}''\Psi''\,dx$$
$$- a'''M'''q'^3\,(\int \mathfrak{T}'''\Psi'''\,dx - \int \mathfrak{U}'''\Psi'''\,dx)$$
— etc. etc. etc.

§. 360.

Alle Integrale, welche in diesem Ausdruck vorkommen, sind blos Functionen von q', da die Integration welche zum zweiten Male nach ψ ausgeführt werden soll, zwischen ganz bestimmten Gränzen genommen wird, also der Winkel ψ ganz in der Formel verschwinden geht. Sucht man also hieraus den Werth von s, so würde diese Grösse die Form

$$s = K^0 + K'\Psi' + K''\Psi'' + K'''\Psi''' + \ldots.$$

erhalten, wo K, K', K'', K'''... Functionen von q sind, und statt M', M''...., ihre allgemeinen Werthe Ψ', Ψ''.... gesetzt werden.

Man erhält hierdurch

$$T = \int \rho\, qq\,(K^0 + K'\Psi' + K''\Psi'' + \ldots.)\,dq$$
$$T' = \int \rho\, q^3\,(K^0 + K'\Psi' + K''\Psi'' + \ldots.)\,dq$$
$$T'' = \int \rho\, q^4\,(K^0 + K'\Psi' + K''\Psi'' + \ldots.)\,dq$$

etc. etc. etc.

Also wenn man bemerkt, dass die Factoren Ψ', Ψ''... ausserhalb des Integralzeichens gesetzt werden können, indem sie bei dieser Integration als constant betrachtet werden.

$$\int T\,dx = 2\int \rho\, qq\, K^0\,dq$$
$$\int T'\Psi'\,dx = \frac{2}{3a'}\int \rho\, q^3\, K'\,dq$$

$$\int T'' \Psi'' dx = \frac{2}{3a''} \int \varrho x^2 \Psi'' dx$$

$$\int T''' \Psi''' dx = \frac{2}{5a'''} \int \varrho x^2 \Psi''' dx$$

etc. etc. etc.

Auf gleiche Weise findet man

$$\frac{dx}{dx} = dK^0 + \Psi' dK' + \Psi'' dK'' + \Psi''' dK''' +$$

werden muss,

$$\int \varrho dx = 2 \int \varrho x^2 dK^0$$

$$\int T' \Psi' dx = \frac{2}{3a'} \int \varrho x^2 dK'$$

$$\int T'' \Psi'' dx = \frac{2}{5a''} \int \varrho x^2 dK''$$

$$\int T''' \Psi''' dx = \frac{2}{7a'''} \int \varrho x^2 dK'''$$

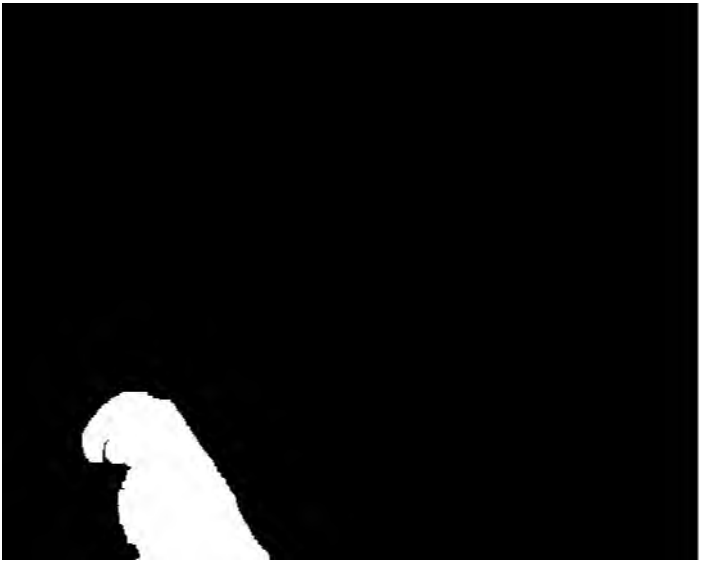
etc. etc. etc.

$$\int x \varrho dx = \int \varrho K^0 dx$$

$$\int x \Psi' \varrho dx = \frac{2}{3a'} \int \varrho K' dx$$

$$\int x \Psi'' \varrho dx = \frac{2}{5a''} \int \varrho K'' \frac{dx}{dx}$$

etc. etc. etc.



$$\ldots' = a' \frac{4\int T' \Psi' dx + \int U' \Psi' dx}{2q\mathcal{Q}}$$

$$- a' \frac{qq}{2\mathcal{Q}} (\int \mathfrak{T}' \Psi' dx + \int \mathfrak{U}' \Psi' dx)$$

$$\ldots'' = \frac{gq^2}{2\mathcal{Q}} + a'' \frac{5\int T'' \Psi'' dx + \int U'' \Psi'' dx}{2q^2\mathcal{Q}}$$

$$- a'' \frac{q^2}{2\mathcal{Q}} \int \mathfrak{U}'' \Psi'' dx$$

$$\ldots''' = a''' \frac{6\int T''' \Psi''' dx + \int U''' \Psi''' dx}{2q^3\mathcal{Q}}$$

$$+ a''' \frac{q^3}{2\mathcal{Q}} (\int \mathfrak{T}''' \Psi''' dx - \int \mathfrak{U}''' \Psi''' dx)$$

etc. etc. etc.

wird, und allgemein für den Coefficienten $K^{(n)}$, n grösser als 2, wird man, wie bei einiger rksamkeit leicht gefunden wird, die Gleichung

$$\ldots) = a^{(n)} \frac{(n+3)\int T^{(n)} \Psi^{(n)} dx + \int U^{(n)} \Psi^{(n)} dx}{2q^n \mathcal{Q}}$$

$$+ a^n \cdot \frac{q^{n+2}}{2\mathcal{Q}} [(n-2)\int \mathfrak{T}^{(n)} \Psi^{(n)} dx - \int \mathfrak{U}^n \Psi^n dx]$$

en. Nun ist aber, wie man aus der Entwicke- der einzelnen Integrale im vorigen Paragraph ssen kann,

$$\ldots^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1)a^{(n)}} \int \rho . q^{n+2} K^{(n)} dq$$

$$\ldots^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1)a^{(n)}} \int \rho . q^{n+3} dK^{(n)}$$

$$\ldots^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1)a^{(n)}} \int \rho . K^{(n)} \frac{dq}{q^{n-1}}$$

$$\ldots^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1)a^{(n)}} \int \rho \frac{dK^{(n)}}{q^{n-2}}$$

ch wenn man diese Werthe in vorige Gleichung tuirt, zugleich statt $\mathcal{Q}$ seinen Werth $\int \varrho\, qqdq$,

ürde auch Oberflächen erhalten, die so sehr
n wollte von der Kugel abweichen, da der
constante Factor von beliebiger Grösse ange-
n werden könnte. Wir müssen daher K Null
und man hat also
$= 0$, $K''' = 0$, $K^{IV} = 0$, $K^{V} = 0$, etc.
Gleichung (A) auch dann noch gilt, wenn
gesetzt wird.

r Werth von s (§. 360.) reducirt sich also auf

$$s = K^{\circ} + K''\Psi''$$

ir haben blos noch die Coefficienten K°, K''
timmen. Der erste findet sich leicht folgen-
sen: Für $\psi = 0$, muss auch s Null seyn, da-
$= q$ werde, und da für diesen Werth von ψ,
$-\frac{1}{3}$ ist; so wird

$$0 = K^{\circ} - \tfrac{1}{3}K''$$

ı wenn diese Gleichung von der vorigen abge-
wird

$$s = K''(\Psi'' + \tfrac{1}{3}).$$

an ist aber $\Psi'' = sin\,\psi^2 - \frac{1}{3}$, also

$$s = K''.\ sin\,\psi^2.$$

§. 363.

ar Bestimmung des Coefficienten K'', der wie
ieht, die Abplattung angiebt, hat man aus §.
ie Gleichung

$$''q^2 \int \varrho\ qqdq = \tfrac{1}{8}gq^6 + \int \varrho.\ q^4 K''\,dq + \tfrac{1}{5}\int \varrho\ q^5\,dK'' - \tfrac{1}{5}q^5 \int \rho\ dK''.$$

ρ constant, so lässt sich K leicht finden; denn
ann diese Gleichung auch so schreiben

$$''q^2 \int \rho\ qqdq = \tfrac{1}{8}gq^6 + \tfrac{1}{5}\int \rho.\ d.\ q^5 K'' - \tfrac{1}{5}q^5 \int \varrho.\ dK''$$

enn man integrirt, indem ρ als constant be-
et wird, und lässt alle Integrale von $q = 0$ an
winden

$K''q^5\rho = \frac{1}{8}gq^6 + \frac{1}{5}\varrho\ q^5 K$, und hieraus

$$K'' = \frac{15g}{4\rho}.$$

Allgemeinen lässt sich auch diese Gleichung
ntegriren, obgleich viele besondere Fälle für

das Gesetz der Dichtigkeit ϱ angegeben werden
nen, in welchen die Integration ausgeführt w
kann; man sieht aber doch so viel aus dem
dass der Werth von A'' unter der Form $g\sigma$
geben werden kann, wo σ eine Function von q

§. 364.

Um das Gesetz der Schwere an der Ober
der Erde zu finden, bedient man sich der §
entwickelten Gleichung, und lässt das in ff mu
cirte Glied weg, weil wir blos die von der
Potenz der Abplattung abhängenden Glieder b
sichtigt haben. Bezeichnet nämlich G die Sc
an irgend einem Orte der Erde, dessen geocent
Breite ψ' ist, wofür man auch ohne Fehler di
graphische Breite nehmen kann, da beide W
blos um eine der Abplattung proportionale
verschieden sind, so hat man

$$GG = \left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \frac{1}{r'r'}$$

$$+ 4f\left[\left(\frac{dV}{dr'}\right) r' \cos\psi'^2 - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \sin\psi' co\right.$$

Nun haben wir aber bei den frühern Un
chungen über die Schwere (§. 353.) gesehen,

§. 365.

ı hat nun in unserm Fall (§. 356.)

$$2\pi\begin{cases}\frac{L}{r'}+\frac{L'}{r'^2}+\frac{L''}{r'^3}+\ldots.\\ +\mathfrak{L}+\mathfrak{L}'r'+\mathfrak{L}''r'^2+\ldots.\end{cases}$$

h

$$=2\pi\begin{cases}-\frac{L}{r'^2}-\frac{2L'}{r'^3}-\frac{3L'''}{r'^4}\ldots.\\ +\mathfrak{L}'+2\mathfrak{L}''r'+\ldots.\end{cases}$$

der Oberfläche werden die Grössen $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$...
st Null, also bleibt blos

$$=-\frac{2\pi}{r'^2}\left\{L+\frac{2L'}{r'}+\frac{3L''}{r'^2}+\ldots.\right.$$

§. 366.

ı ist aber aus §. 357 bis 362.

$= 2\int\rho\ qqdq - 3\int T\,dx - \int U\,dx$
$= 0$
$= -a''M\ [5\int T''\Psi''\,dx + \int U''\Psi''\,dx]$
$= 0,\ L^{IV} = 0$ etc. etc.

$dx = 2\int\varrho\ qqK^0\,dq$
$dx = 2\int\varrho\ q^3 dK^0$

$'\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\int\varrho\ q^4K''dq$

$'\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\int\rho\ q^5dK''$

auch
$3\int T\,dx + \int U\,dx$
$= 6\int\rho\ qqK^0\,dq + 2\int q^3\,dK^0$
$= 2\int\rho.\ d.\ q^3K^0$
$= \frac{2}{3}\int\rho.\ d.\ q^3K''$

ıach §. 363., $K^0 = \frac{1}{3}K''$ seyn muss. Eben

$$'\Psi''\,dx + \int U''\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\int\rho.\ d.\ q^5K''$$

raus

$L = 2\int\varrho\ qqdq - \frac{2}{3}\int\rho.\ d.\ q^3K''$

war ferner $r' = q''(1 - K'' \sin\psi'^2)$, folglich

$$\frac{1}{r'r'} = \frac{1}{q''q''}(1 + 2K'' \sin\psi'^2).$$

iesen Werth muss man in die obere Gleichung ; allein man kann in allen Gliedern, das erste ommen, $r' = q''$ setzen; es kommt daher, da $= f$

$$) = -\frac{4\pi \int \rho\, qqdq}{q''q''} + \frac{4\pi K'' \int \rho\, qqdq}{q''q''} \sin\psi'^2$$
$$+ \frac{4\pi \int \rho.\, d.\, q^3 K''}{3q''q''} - 3f q'' \sin\psi'^2$$
$$+ fq'' - 4K''\pi \frac{\int \rho\, qqdq}{q''q''}$$

man zugleich $M'' = \sin\psi^2 - \frac{1}{3}$, $2\pi g = f$ nimmt.

§. 368.

ddirt man auf beiden Seiten $2fr' \cos\psi'^2 =$ $os\,\psi'^2$, so kommt (§. 372.)

$$) + 2fr' \cos\psi'^2 = -G$$
$$= -\frac{4\pi \int \rho\, qqdq}{q''q''} + \frac{4\pi \int \rho\, d.\, q^3 K''}{3q''q''}$$
$$- \frac{4K''\pi \int \rho\, qqdq}{q''q''} + 3fq''$$
$$- \sin\psi'^2 \left[5fq'' - \frac{4\pi K'' \int \rho.\, qqdq}{q''q''}\right].$$

ter dem Aequator wo $\psi' = 0$ ist, sey $G = G^0$, l auch

$$= G^0 \left[1 + \sin\psi'^2 \left(\frac{5fq''}{G^0} - K''\right)\right].$$

ar $2f$ die Schwungkraft in der Einheit der ung, folglich wird der Coefficient von $\sin\psi'^2$, wir das Verhältniss der Schwungkraft am Aezur Schwere daselbst durch γ bezeichnen

$$\tfrac{5}{2}\gamma - K''$$

schliessen hieraus, dass wenn die Schwe- er dem Aequator als Einheit angenom- ird, die Zunahme der Schwere vom

Aequator zum Pol zur Abplattung addirt, immer $\frac{5}{2}$ das Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere seyn wird, wie auch das Gesetz der Dichtigkeit beschaffen seyn mag. Dieser Satz ist unter dem Namen des Clairaut'schen Theorems bekannt.

§. 369.

Wir wollen nun noch untersuchen, ob in der zweiten Potenz der Abplattung die Oberfläche der Flüssigkeit vom elliptischen Sphäroïd abweicht oder nicht. Zu diesem Ende setzen wir

$$r = q\,[1 - u\,(\Psi'' + \tfrac{1}{3}) - v\,(\Psi^{IV} - \tfrac{3}{35})]$$

zu welcher Voraussetzung wir berechtigt sind, und wo u von der Ordnung der Centrifugalkraft, und v von der Ordnung des Quadrats derselben seyn wird, so dass wir also das Product uv, die Potenzen von v, und alle Potenzen von u die das Quadrat übersteigen, vernachlässigen können. Der allgemeine Ausdruck von r^m wird dann

$$r^m = q^m \left\{ 1 - mu(\Psi'' + \tfrac{1}{3}) - mv(\Psi^{IV} - \tfrac{3}{35}) + \frac{m.m-1}{1.2} u^2 (\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2 \right\}.$$

Nun ist aber aus §. 337.

$$(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2 = \Psi^{IV} + \tfrac{6}{7}\Psi'' + \tfrac{1}{9}$$

also auch

$$r^m = q^m \left\{ 1 - \frac{mu}{3} + \tfrac{3}{35} mv + \frac{m.m-1}{10} uu - \Psi''\left(mu - \tfrac{6}{7}\frac{m.m-1}{2} uu\right) - \Psi^{IV}\left(mv - \frac{m.m-1}{1.2} u^2\right) \right\}.$$

§. 370.

Da also in jeder beliebigen Potenz von r blos die beiden von ψ abhängenden Grössen Ψ'' und Ψ^{IV} vorkommen, so sieht man leicht, dass

$L' = 0$, $L''' = 0$, $L^{v} = 0$, $L^{vi} = 0$, etc.
$\mathfrak{L}' = 0$, $\mathfrak{L}''' = 0$, $\mathfrak{L}^{v} = 0$, $\mathfrak{L}^{vi} = 0$, etc.

en wird. Die Gleichung des Gleichgewichts der gkeit (§. 359.), reducirt sich daher auf

$$= g\, r'r'\, cos\psi'^{x} + \frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^{3}} + \frac{L^{iv}}{r'^{5}} + \ldots.$$
$$+ \mathfrak{L} + \mathfrak{L}''r'^{2} + \mathfrak{L}^{iv}r'^{4} + \ldots$$

man der Kürze wegen

$$^{m}\left(1 - \frac{mu}{3} + {}^{3}_{5}\, mv + \frac{m.\,m-1}{10}\, uu\right) = X^{(m)}$$

$$\left(mu - {}^{4}_{5}.\ \frac{m.\,m-1}{2}\, uu\right) = x^{(m)}$$

$$\left(mv - \frac{m.\,m-1}{2}\, uu\right) = y^{(m)}$$

hält man

$$r^{m} = X^{(m)} - \Psi''x^{(m)} - \Psi^{iv}y^{(m)}$$

hierdurch (§. 357.)

$$L = {}^{3}_{5} \int \rho.\, dX^{(3)}.$$
$$L'' = -\,{}^{2}_{5}{}^{3}_{5} \int \rho.\, d.\, x^{(5)}.\, M''$$
$$L^{iv} = -\,{}^{2}_{5}{}^{3}_{5} \int \rho.\, d.\, y^{(7)}.\, M^{iv}.$$

§. 371.

s ist nun auch, wenn man statt Ψ, M setzt

$$r^{m} = X^{(m)} - M''x^{(m)} - \Psi^{iv}y^{(m)}$$

hieraus, indem man die überflüssigen Glieder, e zu hohe Potenzen von u und v enthalten en, weglässt, und bemerkt, dass $x^{(m)}$ von der ung der Centrifugalkraft, $y^{(m)}$ von der Ordnung Quadrates ist.

$$\frac{L}{r'} = {}^{3}_{5}\, X^{(-1)} \int \rho.\, dX^{(3)}$$
$$- {}^{2}_{5}\, M''x^{(-1)} \int \rho.\, dX^{(3)}$$
$$- {}^{2}_{5}\, M^{iv}y^{(-1)} \int \rho.\, dX^{(3)},$$

$$\frac{L''}{r'^{3}} = -\,{}^{2}_{2}{}^{2}_{5}\, X^{(-3)}\, M'' \int \rho.\, d.\, x^{(5)}$$
$$+ {}^{2}_{2}{}^{2}_{5}\, X^{(-3)}\, M''^{2} \int \rho.\, d.\, x^{(5)}.$$

$$\frac{L^{IV}}{r'^5} = -\frac{4}{63} M^{IV} X^{(-1)} \int \rho . d . y^{(7)}$$

$$gr'^2 r'^2 \cos\psi'^2 = gr'^2 r'^2 \left(\tfrac{2}{3} - M''\right)$$
$$= \tfrac{2}{3} g X^{(2)} - \tfrac{2}{3} g M'' x^{(2)}$$
$$- g M'' X^{(2)} + g M''^2 x$$

§. 372.

An die Stelle von M''^2 kann man noch, wie der Betrachtung des Ausdrucks von $(\Psi'' + \frac{1}{3})^2$ in rigen Paragraph sich ergiebt, den Werth

$$M^{IV} + \tfrac{8}{63} \Psi'' + \tfrac{2}{63}$$

setzen, und man erhält dann den Werth der Gr

$$g r'^2 r'^2 \cos\psi'^2 + \frac{L}{r'^3} + \frac{L''}{r'^5} + \frac{L^{IV}}{r'^7}$$
$$= \tfrac{2}{3} g X^{(2)} + \tfrac{4}{63} g x^{(2)}$$
$$+ \tfrac{8}{63} X^{(-1)} \int \rho . dX^{(3)}$$
$$+ \frac{8}{25.45} x^{(-3)} \int \rho . d . x^{(5)}$$

$$M'' \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{8}{63} x^{(-1)} . \int \rho . dX^{(3)} \\ + \tfrac{8}{63} X^{(-3)} . \int \rho . d x^{(5)} \\ - \frac{8}{21.25} x^{(-3)} . \int \rho . d . x^{(5)} \\ + \tfrac{10}{21} g x^{(2)} + g X^{(2)} \end{array} \right\}$$

$$- M^{IV} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{8}{63} y^{(-1)} \int \rho . d X^{(3)} \\ - \tfrac{8}{63} x^{(-3)} \int \rho . d x^{(5)} \\ + \tfrac{8}{63} X^{(-5)} \int \rho . d . y^{(7)} - g x^{(2)} \end{array} \right\} .$$

§. 373.

Wir haben nun noch die Grösse $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'' r'^2$ $\mathfrak{L}^{IV} r'^4$, die den zweiten Theil der Gleichung Gleichgewichts ausmacht, darzustellen. Aus §. 358

$$\mathfrak{L} = \int \mathfrak{N} dx$$
$$\mathfrak{L}'' = a'' M'' \int \mathfrak{N}'' \Psi'' dx$$
$$\mathfrak{L}^{IV} = a^{IV} M^{IV} \int \mathfrak{N}^{IV} \Psi^{IV} dx$$

$$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2} \int \rho d.\, rr.$$
$$\mathfrak{N}'' = \int \rho.\, d.\, \log r.$$
$$\mathfrak{N}^{IV} = -\tfrac{1}{2} \int \rho.\, d.\, \frac{1}{rr}.$$

ist ferner

$$= q\,[1 - u(\Psi'' + \tfrac{1}{3}) - v(\Psi^{IV} + \tfrac{3}{35})]$$

wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen und den einen Logarithmen in eine Reihe elt

$$= \log q - u(\Psi'' + \tfrac{1}{3}) - v(\Psi^{IV} - \tfrac{3}{35}) - \tfrac{1}{2} uu(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2$$
$$= \log q - \tfrac{1}{3} u + \tfrac{3}{35} v - \tfrac{1}{10} uu - \Psi''(u + \tfrac{3}{7} uu) - \Psi^{IV}(v + \tfrac{1}{2} uu).$$

§. 374.

en so ist auch vermittelst der §. 370. ge-en Bezeichnung

$$rr = X^{(2)} - \Psi'' x^{(2)} - \Psi^{IV} y^{(2)}$$
$$\frac{1}{rr} = X^{(-2)} - \Psi'' x^{(-2)} - \Psi^{IV} y^{(-2)}$$

d durch die vorigen Formeln

$$\tfrac{1}{2} \int \rho\, dX^{(2)} - \tfrac{1}{2} \Psi'' \int \rho\, dx^{(2)} - \tfrac{1}{2} \Psi^{IV} \int \rho\, dy^{(2)}$$
$$\int \rho.\, d.\, [\log q - \tfrac{1}{3} u + \tfrac{3}{35} v - \tfrac{1}{10} uu]$$
$$- \Psi'' \int \rho.\, d(u + \tfrac{3}{7} uu)$$
$$- \Psi^{IV} \int \rho.\, d(v + \tfrac{1}{2} uu).$$
$$- \tfrac{1}{2} \int \rho\, dX^{(-2)} + \tfrac{1}{2} \Psi'' \int \rho.\, d.\, x^{(-2)} + \tfrac{1}{2} \Psi^{IV} \int \rho.\, d.\, y^{(-2)}$$

raus erhält man

$$\mathfrak{L} = \int \rho.\, dX^{(2)}$$
$$\mathfrak{L}'' = -\frac{2}{5a''} M'' \int \rho.\, d(u + \tfrac{3}{7} uu)$$
$$\mathfrak{L}^{IV} = +\frac{1}{9a^{IV}} M^{IV} \int \rho.\, dy^{(-2)}.$$

ist aber zu bemerken, dass diese Integrale eselben Gränzen haben, als diejenigen, welche ssen L, L'', L^{IV} bestimmen, und um zwi-en vorgezeichneten Integrationen Gleichheit

hervorzubringen, wollen wir die von $q=0$ bis $q=$ genommenen Integrale

$$\int \rho\, dZ^{(-1)} = \zeta$$
$$\int \rho\, dz - \tfrac{1}{2}\omega\omega = \vartheta$$
$$\int \rho\, dy^{(-2)} = \varepsilon$$

setzen, wo daher ζ, ϑ, ε constante Grössen sind, von denen ϑ von der Ordnung der ersten Potenz der Centrifugalkraft, und ε von der Ordnung ihres Quadrates ist. Dann hat man

$$\mathfrak{L} = \zeta - \int \rho\, dX^{(-2)}$$
$$\mathfrak{L}'' = -\frac{2}{5a''} M'' [\vartheta - \int \rho\, d(z + \tfrac{1}{2}\omega\omega)]$$
$$\mathfrak{L}^{IV} = +\frac{1}{9a^{IV}} M^{IV} [\varepsilon - \int \rho\, dy^{(-2)}].$$

wo die Integrale zwischen denselben Gränzen, als die zur Bestimmung von L, L'', L^{IV} dienenden, nämlich von $q=0$ bis $q=q'$, genommen werden müssen.

§. 375.

Aus §. 370. sieht man, dass

$$r'r' = X^{(2)} - M'' x^{(2)} - M^{IV} y^{(2)},$$
$$r'^4 = X^{(4)} - M'' x^{(4)} - M^{IV} y^{(4)},$$

folglich wird mit Vernachlässigung derjenigen Glieder, die das Quadrat der Centrifugalkraft übersteigen

$$\mathfrak{L}''r'r' = -\tfrac{2}{5} M'' X^{(2)} [\vartheta - \int \rho\, d(z + \tfrac{1}{2}\omega\omega)]$$

§. 376.

Man sieht aus dieser und der Gleichung §. 372., man folgende Formen erhält

$$\mathfrak{L}r'r'\cos\psi'^2 + \frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^3} + \frac{L^{IV}}{r'^5} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}M'' - \mathfrak{C}M^{IV},$$

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'.r'r' + \mathfrak{L}'.r'^4 = \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}'M'' + \mathfrak{C}'M^{IV},$$

ch wird die Gleichung des Gleichgewichts der igkeit §. 370.

$$= (\mathfrak{A}+\mathfrak{A}') - M''(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}') - M^{IV}(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}').$$

Setzt man hierin

$$M'' = \sin\psi'^2 - \tfrac{1}{3}$$
$$M^{IV} = \sin\psi'^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi'^2 + \tfrac{3}{35}$$

ird dieselbe, indem man sie nach den Potenzen $\sin\psi'$ ordnet, folgende Gestalt erhalten:

$$k = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'}{3} - 3\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'}{35} - \sin\psi'^2\left[\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'+6\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'}{7}\right] - \sin\psi'^4(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}')$$

da k von ψ' völlig unabhängig seyn muss, so

$$k = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'}{3} - 3\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'}{35}$$

$$) = \mathfrak{B}+\mathfrak{B}' + 6\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'}{7}$$

$$) = \mathfrak{C}-\mathfrak{C}'.$$

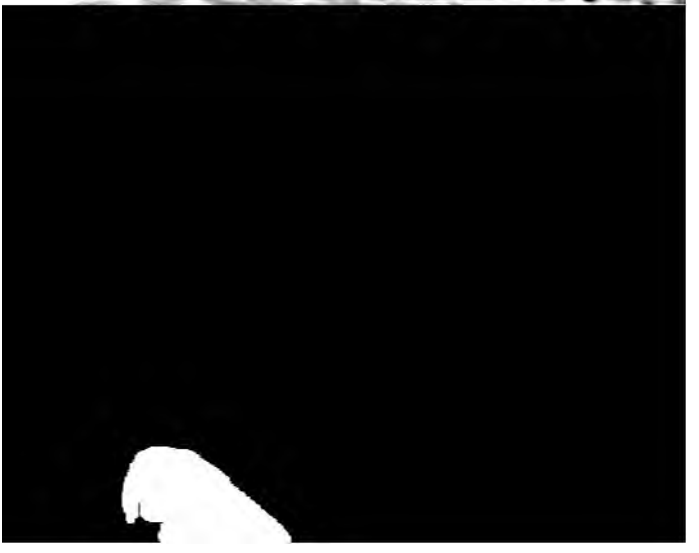
ese Gleichungen reduciren sich auf

$$k = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$$

denen die beiden letztern zur Bestimmung von u v dienen.

§. 377.

Die Werthe von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ finden sich, in- man immer die höhern Potenzen, die nicht mit etracht gezogen werden sollen, vernachlässigt



$$\Psi'' = \sin\psi^2 - \tfrac{1}{3}$$
$$\Psi^{IV} = \sin\psi^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi^2 + \tfrac{3}{35}$$

nt, so kommt

$$r = q\,[1 - u\sin\psi^2 - v(\sin\psi^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi^2)].$$

n diese Gleichung auf die Form der vorigen zu ingen, schreibe man sie so:

$$r = q\,[1 - (u + \tfrac{1}{7}v)\sin\psi^2 + v\sin\psi^2\cos\psi^2].$$

wird daher, wenn man diese mit der vorigen eichung vergleicht

$$u + \tfrac{1}{7}v = \alpha, \qquad v = -\tfrac{7}{2}\alpha\alpha.$$

Sollte also die Oberfläche der Schichten von glei- er Dichtigkeit ein elliptisches Sphäroïd seyn, so isste zwischen den Coefficienten u und v die Re- ion

$$v + \tfrac{7}{2}uu = 0$$

tt finden, und die Gleichung $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ würde durch Substitution des hieraus folgenden Werthes von identisch werden.

§. 379.

Setzt man für $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ ihre Werthe aus §. 377. die Gleichung $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, so wird dieselbe, indem gleich $v = -\frac{7}{2}uu$ genommen wird, und man be- erkt, dass unter dieser Voraussetzung auch s Null yn muss, da diese Constante den Werth des dabei henden Integrals ausdrückt, welches in unserm ll allgemein Null ist

$$-\frac{1}{q^6}\int\rho.\,d.\,q^7uu + \tfrac{8}{5}.\frac{u}{q^5}\int\rho.\,d.\,q^6u$$
$$-2g\,qqu + \tfrac{1}{5}.\frac{uu}{q}\int\rho.\,d.\,q^5$$
$$= \tfrac{1}{5}qqu\,\delta - \tfrac{1}{5}qqu\int\rho\,du.$$

Die Gleichung $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0$ giebt, wenn man für und $\mathfrak{B}'$ ihre Werthe substituirt, und die höhern otenzen von u, so wie das Product ug, vernach- ssigt

$$-\tfrac{8}{5}.\frac{u}{q}\int\rho.\,d.\,q^5 + \tfrac{2}{5}.\frac{1}{q^5}.\int\rho.\,d.\,q^6u$$
$$+ g\,qq = -\tfrac{2}{5}qq\delta + \tfrac{2}{5}qq\int\rho\,du$$

ltiplicirt man diese Gleichung mit $2u$, und addirt

das Product zur vorigen, so kommt, indem zugleich durch q^4 multiplicirt worden ist,

$$\int \rho.\, d.\, q^7 uu - 2uqq \int \rho.\, d.\, q^5 u + uuq^4 \int \rho.\, d.\, q^3 = 0$$

Dieser Gleichung geschieht, wie man leicht bemerkt, dann Genüge, wenn die Dichtigkeit als constant angenommen wird, so dass daher eine homogene Flüssigkeit gewiss ein elliptisches Sphäroïd im Zustande des Gleichgewichts bildet, wie auch schon allgemein §. 292. bewiesen worden.

Man setze der Kürze wegen $uqq = x$, $\rho qq = y$, so lässt sich vorige Gleichung auch so schreiben

$$3\int yxxdq + 2\int yxqdx - 6x\int yxdq - 2x\int yqdx + 3xx\int ydq = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so wird

$$3x\int ydq = 3\int yxdq + \int yqdx.$$

Durch die zweite Differentiation erhält man

$$3\int ydq = yq,$$

und wenn zum dritten Male differentiirt wird

$$2ydq = qdy$$

oder indem wir durch qy dividiren

$$\frac{2dq}{q} = \frac{dy}{y}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist bekanntlich

$$log\, y = log\, c + log\, qq$$

also auch $y = cqq$, wo c eine constante Grösse bedeutet. Nun war aber zugleich $y = \rho qq$, folglich $\rho = c$, und wir müssen aus dieser Analyse schliessen, dass nur in dem Falle, wo eine Flüssigkeit homogen ist, im Zustande des Gleichgewichts, dieselbe, während sie um eine Axe sich dreht, die Gestalt eines elliptischen Sphäroïds annehmen wird.

§. 380.

Wir wollen als ein Beispiel, über den Zusammenhang der Abplattung und der halben grossen Axe der Schicht, eine Hypothese aufstellen, die viel wahrscheinliches für sich hat. Es ist nämlich durch Canton's Versuche ausgemacht worden, dass durch starken Druck das Volumen der Flüssigkeit wirklich verringert wird, folglich ihre Dichtigkeit zunimmt;

en wir den Druck durch p, die Dichtigkeit , so wollen wir annehmen, es sey

$$dp = \frac{4\pi}{66}\,\rho d\varrho,$$

ne constante Grösse bedeutet, und man sieht dass die Zunahme der Dichtigkeit, die durch stimmte Vermehrung des Drucks hervorge- wird, desto kleiner ausfällt, je grösser die eit schon geworden ist. Wäre $6 = 0$, so das Fluidum nicht zusammendrückbar seyn. net man die Dichtigkeit an der Oberfläche, 0 ist, durch ϱ', so hat man durch Integration igen Differentialgleichung

$$p = \frac{2\pi}{66}(\rho\rho - \varrho'\rho').$$

n ist, wenn wir die auf alle Theilchen der eit wirkenden Kräfte nach den drei Axen , durch P, Q, R bezeichnen, aus. 290.

$$dp = \varrho\,(Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta)$$

ch, wenn auf beiden Seiten durch ϱ dividirt n integrirt wird,

$$\int\frac{dp}{\rho} = \int(Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta).$$

unserm Fall haben wir aber

$$l\xi + Qd\eta + Rd\zeta) = V + \int r'r'\cos\psi^2$$

a ausserdem (§. 356.)

$$V + \int r'r'\cos\psi'^2 = c = 2k\pi$$

rd auch

$$2k\pi = \int\frac{dp}{\rho} = \frac{4\pi}{66}\rho + Const.$$

§. 381.

Nun ist ferner, wenn wir alle von der Schwung- abhängenden Glieder vernachlässigen, aus §. 359.

$$k = \frac{2Q}{q} + 2\mathfrak{M} - 2\mathfrak{Q}$$

da aus §. 357 und 358.

$$l = \int\varrho\,qqdq, \qquad \mathfrak{Q} = \int\rho\,qdq$$

$$k = \frac{2\int\rho\,qqdq}{q} + 2\mathfrak{M} - 2\int\rho\,qdq.$$

Differentiirt man diese Gleichung, und beme
dass $\mathfrak{M}$ eine constante Grösse ist, so kommt

$$dk = -\frac{2dq}{qq} \int \varrho\, qqdq$$

oder da aus vorigem Paragraph

$$dk = \frac{2}{66}\, d\varrho$$

so kommt auch

$$d\varrho + \frac{66dq}{qq} \int \varrho\, qqdq = 0.$$

Man setze $\varrho = \frac{\omega}{q}$, so wird

$$d\varrho = \frac{qd\omega - \omega dq}{qq} \text{ also}$$

$$qd\omega - \omega dq + 66dq \int \omega qdq = 0.$$

Nimmt man hiervon das Differential, indem
als constant betrachtet wird, so erhält man

$$dd\omega + 66\omega\, dq^2 = 0.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten durch $2d\omega$
integrirt dann, so wird

$$d\omega^2 + 66\omega\omega\, dq^2 = 66aa\, dq^2$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Hieraus
hält man

$$6dq = \frac{d\omega}{\sqrt{aa - \omega\omega}}$$

von welcher Gleichung bekanntlich das Integral

$$6q + b = Arc\ sin = \frac{\omega}{a}$$

ist, und b eine Constante bedeutet. Dieser Ausdr
lässt sich auch so schreiben

$$\omega = a\ sin\,(b + 6q)$$

folglich, wenn auf beiden Seiten durch q divid
und statt $\frac{\omega}{q}$ sein Werth ρ gesetzt wird

$$\rho = \frac{a.\ sin(b + 6q)}{q}.$$

Die Constante b muss Null seyn, weil sonst
$\sigma = 0$ im Mittelpunkte der Erde eine unendlich gro
Dichtigkeit statt finden würde, so dass

$$\rho = a. \frac{\sin 6q}{q}.$$

n der Oberfläche sey die Dichtigkeit $= \rho'$, und Werth von $q = q''$; es muss daher

$$\rho' = a \frac{\sin 6q''}{q''}.$$

n, und vermittelst dieser Gleichung lässt sich iniren. Man erhält dann

$$\rho = \rho' \frac{\sin 6q}{\sin 6q''} \cdot \frac{q''}{q}.$$

§. 382.

e ganze Masse der Erde wird durch $4\pi \int \rho\, qqdq$ lrückt; indem man die von der Abplattung abaden Glieder weglässt. Bezeichnet man also ittlere Dichtigkeit der Erde durch ρ^0, so wird

$$4\pi \int \rho\, qqdq = 4\pi \rho^0 \int qqdq$$
$$\int \varrho\, qqdq = \tfrac{1}{3} \rho^0 q''^3.$$

Nun ist aber, wenn wir den vorigen Werth von men

$$\int \rho\, qqdq = \rho' \frac{q''}{\sin 6q''} \cdot \int q. \sin 6q. dq$$

$$= \rho' \frac{q''}{\sin 6q''} \cdot \left[-\frac{q'' \cos 6q''}{6} + \frac{\sin 6q''}{66} \right]$$

das Integral von $q = 0$ bis $q = q''$ genommen Hieraus ergiebt sich

$$= \frac{3}{66q''q''} \left[1 - \frac{q''6}{\tan g\, q''6} \right].$$

§. 383.

ur Bestimmung der Abplattung u dienende ist $\mathfrak{B} \int \mathfrak{B}' = 0$, oder (§. 379.)

$$\int \rho. d. q^3 + \tfrac{3}{5}. \frac{1}{q^3} \int \rho. d. q^5 u$$
$$= \tfrac{3}{5} qq^3 + \tfrac{3}{5} qq \int \varrho\, du.$$

Durch fortgesetzte Differentiation wird dieselb

$$\frac{ddu}{dq^2} - \frac{t}{[illegible]} \int \rho \, [illegible]$$

$$- 2\rho \, [illegible] - \frac{[illegible]}{[illegible]} = 0.$$

Man setze, um diese Gleichungen zu integriren

$$u \int \rho \, qqdq = t$$

so wird

$$\frac{du}{dq} \int \rho \, qqdq + u\rho qq = \frac{dt}{dq}$$

$$\frac{ddu}{dq^2} \int \rho \, qqdq + 2 \frac{du}{dq} \rho qq + \frac{d\rho}{dq} uqq + 2u\rho q = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

also aus dieser letztern Gleichung

$$\frac{ddu}{dq^2} \int \rho \, qqdq + 2 \frac{du}{dq} \rho qq + 2u\rho q$$

$$= \frac{ddt}{dq^2} - \frac{d\rho}{dq} uqq$$

und die vorige Gleichung lässt sich so schreiben

$$\frac{ddt}{dq^2} - \frac{d\rho}{dq} . \, uqq - \frac{6t}{qq} = 0.$$

Nun ist aber vermöge des Ausdrucks §. 381.

$$d\rho + \frac{66}{[illegible]} dq \int \rho . \, qqdq = 0.$$

$$\left(1 - \frac{3}{66qq}\right) \sin 6q + A.\frac{3}{6q} \cos 6q$$

ne willkührliche Constante bedeutet.

§. 384.

diese Constante zu bestimmen, setzen wir att t seinen Werth $u \int \rho\, qqdq$, und nehmen ze wegen

$$6q = x, \quad \frac{\varrho' q''}{\sin 6q''} = \Delta, \quad \text{so wird}$$

$$qdq = A.\sin x - \frac{3A}{xx}(\sin x - x.\cos x).$$

rth von $\int \varrho\, qqdq$ erhält man aus §. 382.

$$qdq = \frac{\Delta}{66}(\sin x - x.\cos x)$$

ommt

$$\frac{A66}{\Delta}.\frac{\sin x}{\sin x - x.\cos x} - \frac{3A66}{\Delta xx}.$$

§. 385.

Gleichung $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0$ (§. 383.), lässt sich chreiben

$$\rho\, qqdq + \tfrac{1}{6}.\frac{1}{qq}\int \varrho.\, d.q^6 u + \tfrac{1}{2} gq^3$$

$$= -\tfrac{1}{6} q^3\, [\delta - \int \rho\, du]$$

her sich A bestimmen lassen muss. Da nun isse constant ist, so brauchen wir die vorige g nur in einem besondern Falle zu betrach- d wir wollen annehmen, die in derselben ienden Integrale werden bis zur Oberfläche ausgedehnt; dann ist bekanntlich

$$\delta - \int \rho\, du = 0$$

as von $q = 0$ bis an die Oberfläche genom- tegral $\int \rho\, du$ ausdrückt. Es wird daher hin- die Gleichung

$$\rho\, qqdq + \tfrac{1}{6}.\frac{1}{qq}\int \rho.\, d.q^6 u + \tfrac{1}{2} gq^3 = 0$$

[illegible] wir den an der Oberfl[illegible] [illegible] Werth von u durch u' bezeich[illegible] [illegible] Werth von x durch [illegible]

$$-u - \frac{[illegible]}{[illegible]} + \frac{1}{2} \cdot \frac{gq''^5}{\int \rho q q dq} = 0.$$

§ 386.

[illegible] § 386. [illegible] oder $4\pi g q''$ die Schw[illegible] [illegible] und die Schwere daselbst [illegible] [illegible] wir die der Schwungkraft [illegible] [illegible] Glieder vernachlässigen, folglich das [illegible] [illegible] der Schwungkraft zur Schwere unter [illegible]

$$\gamma = \frac{gq''^5}{\int \rho q q dq}$$

[illegible] das letzte Glied der vorigen Gleichung ni[illegible] [illegible] und man kann dieselbe so schreib[illegible]

$$\frac{\int \rho \, d \, q^5 u}{q' q' \int \rho q q dq} = 5u' - \tfrac{5}{2}\gamma$$

Man hat ferner

$$\int \rho \, d \, q^5 u = \rho' q''^5 u' - \int q^5 u \, d\rho$$

und da (§. 381.)

$$d\rho = -\frac{66 dq}{qq} \cdot \int \rho \, q q dq, \quad \text{so wird}$$

[illegible]

man das Integral von $x = 0$ bis $x' = x$ aus-
Ferner hat man

$$= \Delta . \frac{\sin 6q}{q}, \quad \varrho' = \Delta . \frac{6 \sin x'}{x'}$$

$$= \frac{A66}{\Delta} \frac{\sin x'}{\sin x' - x' \cos x'} - \frac{3A66}{\Delta x'x'}$$

a auch $q''^6 = \frac{x'^6}{6^6}$, so wird

$$u' = \frac{A}{66} \left[\frac{x'^4 \sin x'^2}{\sin x' - x' \cos x'} - 3x'^2 \sin x' \right]$$

eraus

$$d.\ q^6 u = \frac{A}{66} \left\{ \begin{matrix} \frac{x'^4 \sin x'^2}{\sin x' - x' \cos x'} \\ - x' \cos x' (x'^2 - 15) \\ + 3 \sin x' (x'^2 - 5) \end{matrix} \right\}.$$

af gleiche Weise wird ferner

$$\int \varrho . qqdq = \frac{\Delta x'x'}{6^4} (\sin x' - x' \cos x'),$$

$$\int'' \int \varrho . qqdq = \frac{5A}{66} x'x' \sin x' - \frac{15A}{66} (\sin x' - x' \cos x'),$$

ach den gehörigen Zusammenziehungen findet
eicht

$$= \frac{5\Delta\gamma}{266} \cdot \frac{(\sin x' - x' \cos x')^2}{\sin x'^2 - x' \cos x' \sin x' - x'x'},$$

un war

$$= \frac{A66}{\Delta} \cdot \frac{\sin x' (x'x' - 3) + 3x' \cos x'}{\sin x' - x' \cos x'}$$

h wenn man hierin den Werth von A substituirt

$$= \frac{5}{4}\gamma \frac{(\sin x' - x' \cos x') [\sin x' (3 - x'x') - 3x' \cos x']}{x'x' (x'x' + x' \cos x' \sin x' - 2 \sin x'^2)}$$

ch der Ausdruck der Abplattung an der Ober-
gefunden ist.

§. 387.

ie Untersuchung der Messungen der Pendellän-
ird zeigen, dass die Abplattung der Grösse γ
e als möglich kommt. Nehmen wir daher an,

dass bei der Beschaffenheit des Innern der Erde, die (§. [illegible]) gemachte Hypothese über den Zusammenhang des Drucks mit der Dichtigkeit, wirklich statt hat, so werden wir x' aus voriger Gleichung bestimmen können, indem wir $u = y$ setzen. Wir erhalten dann die Gleichung

$$\frac{(\sin x - x' \cos x')[\sin x'(3 - x'x') - 3x' \cos x']}{x'x'(x'x' + x' \cos x' \sin x' - 2 \sin x'^2)} = \tfrac{2}{3},$$

welche nur durch Probiren aufgelöst werden kann. Der Werth $x' = \frac{1}{2}\pi$ leistet dieser Gleichung sehr nahe Genüge, so dass also $q'b = \frac{1}{2}\pi$ seyn wird.

Die mittlere Dichtigkeit ρ° findet sich

$$= \rho'.\ 1{,}814;$$

die Dichtigkeit im Mittelpunkte $= \rho'.\ 3{,}332$.

Die Abplattung der Schicht die zunächst um den Mittelpunkt herum liegt, ergiebt sich aus der Formel (§. [illegible].)

$$u = \frac{Abb}{\Delta}\left(\frac{\sin x}{\sin x - x \cos x} - \frac{3}{xx}\right)$$

indem in derselben $x = 0$ gesetzt wird. Allein das Resultat wird unter dieser Form unbestimmt, und um den wahren Werth zu erhalten, müssen wir diesen Ausdruck in Reihen entwickeln. Wir können den veränderlichen Theil

$$\frac{\sin x}{\sin x - x \cos x} - \frac{3}{xx}$$

In dem hier betrachteten Fall ist $x' = \frac{4}{5}\pi$, also Abplattung der mittelsten Schicht

$$= \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8}(1+\frac{5}{4}\pi)^3}{\frac{25}{16}\pi\pi - \frac{5}{8}\pi - 1} = \frac{1}{345}$$

wenn man $\gamma = \frac{1}{230}$ annimmt. Die Abplattung der dichten wächst also vom Mittelpunkt nach der Oberfläche.

§. 388.

Nimmt man für die Abplattung u, den aus den Gradmessungen abgeleiteten Werth $= \frac{1}{230}$; so erhält man ziemlich genau $x' = \frac{4}{5}\pi = 142° 30'$.

Hieraus ergiebt sich die mittlere Dichtigkeit

$$\rho° = \rho'. 2{,}057,$$

Dichtigkeit im Mittelpunkte

$$= \rho' \frac{x'}{\sin x'} = 4{,}087.$$

Nimmt man δ unendlich klein, welches dann statt findet, wenn die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist (§. 380.), so geht die Formel für u, da dann auch Δ unendlich klein wird

$$u = \frac{A\delta\delta}{\Delta}\left\{\frac{\sin x}{\sin x - x\cos x} - \frac{3}{xx}\right\}$$

diese über

$$u = -\frac{A\delta\delta}{5\Delta}.$$

Eben so giebt der Ausdruck von A (§. 386.)

$$A = \frac{5}{8}\frac{\Delta\gamma}{\delta\delta}\cdot\frac{(\sin x' - x'\cos x')^2}{2\sin x'^2 - x'\cos x'.\sin x' - xx'}$$

wenn man x' ebenfalls unendlich klein annehmen muss

$$A = -\frac{25}{4}\cdot\frac{\Delta\gamma}{\delta\delta}$$

daraus, wenn man diesen Werth in vorigen Ausdruck von u substituirt

$$u = \frac{5}{4}\gamma$$

Dieß beträgt im Fall der Homogenität der Flüssigkeit, die Abplattung jeder Schicht derselben, $\frac{5}{2}$ des Verhältnisses der Schwungkraft zur Schwere am Aequator.

§. 389.

Wir wollen jetzt noch das Gesetz der Schwere betrachten, welches in geringen Entfernungen über und unter der Erdoberfläche statt findet. Es bezeichne Γ die Schwere, welche für einen Punkt statt findet, der die Entfernung r' vom Mittelpunkt hat, um welcher an der Umdrehung der Erde Theil nimmt, also der Wirkung der Centrifugalkraft unterworfen ist, so hat man aus §. 364.

$$\Gamma = -\left(\frac{dV}{dr'}\right) - 2fr' \cos\psi'^2$$

wo ψ' die geographische Breite des Punktes bedeutet, und

$$V = 2\pi\left[\frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^3} + \mathfrak{L} + \mathfrak{L}''r'^2\right]$$

seyn wird.

Im Fall der Körper über der Erdoberfläche sich befindet, muss $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{L}'' = 0$ seyn, und dann haben wir schon aus §. 367. den Werth von

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi}{r'r'}\int\varrho\, qqdq + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{r'r'}\int\varrho.\, d.\, q^3K''$$
$$+ \frac{3q''^2M''}{r''^4}\left[4K''\pi\int\rho\, qqdq - 2\pi gq''^3\right.$$

wo die Integrale von $q = 0$ bis $q = q''$ genommen werden müssen. Hieraus ergiebt sich, indem wir

nigen Punkt der Oberfläche, über welchem sich r Gegenstand befindet, so wird $r' = R + q''l$, $= q''(1 - K'' \sin\psi'^2)$, und man kann das Verhältnis l der Höhe zum Halbmesser der Erde, immer n der Ordnung der Centrifugalkraft oder der Abattung annehmen, da alle Erhöhungen und Vertiefungen an der Oberfläche der Erde gegen ihren Halbesser genommen, sehr gering sind. Hieraus folgt, ss das Quadrat von l, so wie die Producte $K''l$, fl rnachlässigt werden müssen. Man wird daher in len Gliedern des Werthes von Γ, das erste ausgeommen, statt r', q'' setzen können. Für das erste hält man

$$\frac{1}{r'r'} = \frac{1}{q''^2(1 - K'' \sin\psi'^2 + l)^2}$$
$$= \frac{1}{q''^2} + \frac{2(K'' \sin\psi'^2 - l)}{q''^2}$$

glich auch

$$\Gamma = \frac{4\pi}{q''q''} \int \rho . qqdq - \frac{4\pi}{3q''q''} \int \rho . d . q^3 K''$$
$$+ \frac{4K\pi}{q''q''} \int \varrho\ qqdq - 3fq''$$
$$+ \sin\psi'^2 \left[5fq'' - \frac{4\pi K''}{q''q''} \int \rho\ qqdq\right]$$
$$- \frac{8\pi l}{q''q''} . \int \rho\ qqdq.$$

Nun sey an der Oberfläche der Erde, wo $l = 0$, die Schwere $= G$, so hat man auch

$$\Gamma = G - \frac{8\pi l}{q''q''} \int \varrho\ qqdq$$

er da, wenn man die von der Centrifugalkraft abngenden Glieder vernachlässigt,

$$G = \frac{4\pi}{q''q''} . \int \varrho . qqdq$$

ird, so erhält man, indem man durch Hülfe dieser leichung das Integral $\int \varrho\ qqdq$ eliminirt

$$\Gamma = G - 2lG$$

Hieraus folgt, dass wenn man die in einer beimmten Höhe statt findende Schwere aus der an

der Oberfläche der Erde finden will, man die letzter mit dem doppelten Verhältniss der Höhe zum Halb messer der Erde multipliciren, und dies Product vo der an der Oberfläche statt findenden Schwere ab ziehen muss.

§. 391.

Ist der angezogene Körper so weit entfernt, das er nicht mit an der umdrehenden Bewegung de Erde Theil nimmt, so muss man in dem Ausdruck von Γ (§. 389.) das von der Centrifugalkraft herrüh rende Glied $2fr' \cos\psi'^2$ weglassen, so dass $\Gamma = -\left(\frac{dV}{dr'}\right)$ wird. Wenn ausserdem die Entfer nung r' gegen den Halbmesser q'' sehr gross ist, s darf man alle Glieder des Ausdrucks von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, di durch höhere Potenzen von r', als die zweite, divi dirt sind, vernachlässigen, und es bleibt dann

$$\Gamma = \frac{4\pi}{r'r'} \left[\int \varrho\, qqdq - \tfrac{1}{3}\int \varrho.\, d.\, q^3 K''\right].$$

Man findet aber aus den frühern Untersuchunge leicht, dass der Ausdruck

$$4\pi \left[\int \varrho\, qqdq - \tfrac{1}{3}\int \varrho.\, d.\, q^3 K''\right]$$

die Masse der Erde bedeutet, folglich wird die An ziehung der Erde auf sehr entfernte Punkte, ihre Masse direct, und dem Quadrat der Entfernung de Punktes vom Mittelpunkt der Erde, umgekehrt pro portional seyn.

§. 392.

Für die Schwere im Innern der Erde, muss zu dem in §. 389. gegebenen Ausdruck von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, noch ein durch die Differentiation der Grösse $2\pi\mathfrak{L}''r'^2$ noch r' entstehendes Glied $4\pi\mathfrak{L}''r'$ hinzutreten. Es ist aber aus §. 358.

$$\mathfrak{L}'' = a''M'' \int \mathfrak{U}'' \Psi'' dx$$

d da ausserdem nach §. 360.

$$\int U'' \Psi'' dx = \frac{2}{5a''} \int \rho . dK''$$

wird das hinzuzufügende Glied

$$\frac{8\pi}{5} r' . \int \rho . dK''$$

yn, und man erhält, indem man diese Grösse zu

n §. 366. gegebenen Werthe von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$ hinzusetzt

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi \int \rho . qqdq}{r'r'} + \tfrac{1}{5}\pi \frac{\int \rho . d. q^5 K''}{r'r'}$$

$$+ \frac{12\pi}{5} M'' \frac{\int \rho . d. q^6 K''}{r'^4} + \frac{8\pi}{5} r' M' \int \rho dK''.$$

Man muss aber hierbei bemerken, dass die Integrale von $q = 0$ bis zu dem Werthe von q genommen werden müssen, der derjenigen Schicht entspricht, auf welcher der angezogene Punkt sich befindet. Da wir aber annehmen, dass die Tiefe des Punktes unter der Erdoberfläche, im Verhältniss zum Halbmesser der Erde, blos von der Ordnung der Centrifugalkraft seyn soll, so ist einleuchtend, dass in auf die angegebene Weise genommenen Integrale, an den vollständigen, welche zwischen den Gränzen $= 0$ und $q = q''$ genommen werden, blos um eine Grösse verschieden seyn werden, deren Ordnung der der Centrifugalkraft gleich kommt. Man wird daher allen Gliedern des Ausdrucks von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, das erste genommen, die Integrationen von $q = 0$ bis $q = q''$ ausdehnen dürfen; ausserdem kann man in denselben Gliedern sogleich statt r', q'' setzen, so dass

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi}{r'r'} \int \rho\, qqdq + \frac{4\pi}{3q''q''} \int \rho . d. q^5 K''$$

$$+ \frac{12\pi M''}{5q''^4} \int \rho . d. q^6 K''$$

rd, indem zwischen den besagten Gränzen das Integral $\int \rho\, dK''$ den Werth Null erhält (§. 367.).

§. 393.

Nimmt man aus §. 367. die Gleichung

$$\int \rho.\, d.\, q^4 K'' = K'' q''^2 \int \rho\, qqdq - \tfrac{1}{2} g r''^2$$

und eliminirt durch ihre Hülfe aus vorigem Ausdruck das Integral $\int \rho.\, d.\, q^4 K''$, so erhält man

$$\left(\frac{dK}{dr}\right) = -\frac{4\pi}{r r'} \int \rho\, qqdq + \frac{4\pi}{3q''q''} \int \rho.\, d.\, q^3 K''$$

$$+ \frac{12\pi M'' K''}{q''q''} \int \rho\, qqdq - 6\pi g M' q'.$$

Es sey nun $q''(1-\lambda)$ die halbe grosse Axe derjenigen Schicht, auf welcher sich der angezogene Punkt befindet, so wird das Integral $\int \rho\, qqdq$, welches im ersten Gliede des vorigen Ausdrucks vorhanden ist, zwischen den Gränzen $q = 0$ und $q''(1-\lambda)$ genommen werden müssen. Man weiss aber, dass

$$\int \rho\, qqdq \begin{bmatrix} q = 0 \\ q = q''(1-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$= \int \rho\, qqdq \begin{bmatrix} q = 0 \\ q = q'' \end{bmatrix} - \int \rho\, qqdq \begin{bmatrix} q = q''(1-\lambda) \\ q = q'' \end{bmatrix},$$

wo die in den Klammern angegebenen Werthe von q die Gränzen bedeuten, zwischen denen die Integrale zu nehmen sind. Das letztere Integral kann leicht gefunden werden, da die Gränzen zwischen denen es gesucht wird, einander sehr nahe liegen,

§. 394.

Nun ist $r' = q''(1-\lambda)(1-K''\sin\psi'^2)$
$= q''(1-\lambda-K''\sin\psi'^2)$

folglich auch

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{1}{q''q''} + \frac{2(\lambda + K''\sin\psi'^2)}{q''q''}.$$

Ferner ist $2\pi g = f$
$M'' = \sin\psi'^2 - \frac{1}{3}$

folglich, wenn man alle diese Werthe in vorigen Ausdruck von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$ substituirt, so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi}{q''q''}\int\rho\, qqdq + \frac{4\pi}{3q''q''}\int\varrho.\ d.\ q^3K''$$
$$+ \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\rho\, qqdq + fq''$$
$$- \sin\psi^2\,[3fq'' - \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\rho\, qqdq]$$
$$- \frac{8\pi\lambda}{q''^2}\int\rho\, qqdq + 4\pi\rho' q''\lambda.$$

Da nun allgemein (§. 389.)

$$\Gamma = -\left(\frac{dV}{dr'}\right) - 2fr'\cos\psi'^2$$

erhält man endlich, indem statt fr', fq'' gesetzt wird, welches wegen des geringen Unterschiedes von r' und q'' erlaubt ist,

$$\Gamma = +\frac{4\pi}{q''q''}\int\rho.\ qqdq - \frac{4\pi}{3q''q''}\int\rho.\ d.\ q^3K''$$
$$- \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\rho.\ qqdq - 3fq''$$
$$+ \sin\psi'^2\,[5fq'' - \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\varrho\, qqdq]$$
$$+ \frac{8\pi\lambda}{q''q''}\int\rho\, qqdq - 4\pi\rho' q''\lambda.$$

§. 395.

An der Oberfläche der Erde, unter der Breite λ^0, wo $\lambda = 0$ ist, sey die Schwere $= G$, so hat man

$$\Gamma = G + \frac{8\pi\lambda}{q''q''} \int \rho\, qqdq - 4\pi\, \rho'\, q''\lambda$$

und da auch mit Vernachlässigung der Glieder die der Centrifugalkraft und Abplattung proportional sind

$$G = \frac{4\pi}{q''q''} \int \rho\, qqdq$$

so kann man vorigen Ausdruck auch so schreiben:

$$\Gamma = G + 2\lambda G - 4\pi\rho'\, q''\lambda,$$

wo λ das Verhältniss der Tiefe des Punktes unter der Erdoberfläche, zum Halbmesser der Erde ist.

Unter der Voraussetzung der Relation zwischen Druck und Dichtigkeit, welche §. 380. gemacht ist, wird, wenn man die mittlere Dichtigkeit der Erde durch ρ^0 bezeichnet

$$\rho^0 = \rho'.\, 1{,}6^{\cdots} \quad (\S.\ 387.)$$

$$\int \rho\, qqdq = \tfrac{1}{2}\rho^0 q''^3, \quad (\S.\ 382.)$$

folglich auch

$$\frac{4\pi}{q''q''} \int \rho\, qqdq = 4\pi.\, \rho' q''\, 0{,}605$$

und da das vor dem Gleichheitszeichen stehende Glied die Schwere G ist, so hat man

$$\frac{G\lambda}{\ldots}$$

estimmung der Abplattung der Erde durch die an den verschiedenen Oertern gemessenen Längen des Secundenpendels.

§. 396.

Befestigt man einen schweren Körper an einen den, so nimmt dieser Faden, wenn er frei aufgeingt wird, vermöge der Anziehung der Erde, die ichtung der Verticallinie an, und wenn man demlben eine andere Richtung giebt, so wird derselbe ch wieder nach der Verticale zurückgehen; indem er der Körper durch den Fall, in der Lage der erticallinie eine bestimmte Geschwindigkeit erlangt t, die nicht augenblicklich aufgehoben werden nn, so muss die Bewegung so lange noch fortuern, bis die erlangte Geschwindigkeit durch die egenwirkung der Schwere zerstört ist; der Körper ird daher auf der andern Seite der Verticallinie en so hoch wieder steigen, als er vorher gefallen ar, und die Zeit, welche erforderlich ist, dass die eschwindigheit von Null anfangend, wieder bis auf ull abnehme, heisst die Zeit einer Oscillation es Pendels oder eines Pendelschwunges. In fern wir blos die Bewegung des mathematischen endels, bei welchem der Faden ohne Schwere, und er daran befestigte Körper blos als ein materieller unkt angenommen wird, betrachten, wird die Zeit ner Oscillation von der Länge des Fadens, von der chwere und dem Winkel abhängen, welchen die anngliche Lage desselben mit der Verticale macht.

§. 397.

Es sey daher (Fig. 6.) AB die Richtung der Vercallinie, AS das Pendel, welches um den Winkel AB, den wir durch φ bezeichnen, von der Vertiale entfernt ist; in S befindet sich der materielle unkt, welcher in der Richtung SM parallel mit AB on der Erde angezogen wird, allein da derselbe ver-

mittelst des Fadens an den Punkt A befestigt ist, kann er nicht nach der Richtung SM herabfal Wir zerlegen die Kraft der Schwere $MS = G$, r den beiden auf einander senkrechten Richtungen SQ, von denen die erste senkrecht auf dem F AS steht, also die Berührungslinie des Kreisbo SNC ausmacht, und die zweite nach der Verlä rung des Fadens wirkt. Die letztere Kraft v durch den Widerstand des festen Punktes A v aufgehoben, so dass wir es blos noch mit der K SP zu thun haben. Man sieht leicht, dass der W kel $SMP = SAB$, folglich ist $SMP = \varphi$, $SP =$ $\sin SMP = G. \sin\varphi$. Bezeichnen wir ferner das ment des Kreisbogens SNC durch ds, die Zeit d t, so erhalten wir vermittelst der bekannten L sätze der Dynamik, indem wir den Bogen NS v anfangen lassen, und derselbe daher durch das F rücken des Punktes S vermindert wird, die Gleic

$$dds + G. \sin\varphi. dt^2 = 0.$$

Setzen wir nun die Länge des Fadens AS so ist $s = l.\varphi$, da l den Halbmesser des Kreises giebt, der vom Punkt S beschrieben wird, also a $dds = l. dd\varphi$, und wenn wir diesen Werth in vo Gleichung substituiren

$$l. dd\varphi + G. \sin\varphi. dt^2 = 0.$$

§. 398.

Um aus dieser Differentialgleichung der zwe Ordnung, die Gleichung zwischen φ und t abzulei multiplicire man dieselbe mit $2l. d\varphi$, so wird

$$ll. \frac{2d\varphi}{dt} \cdot \frac{dd\varphi}{dt^2} + G \sin\varphi. d\varphi = 0.$$

Dies giebt, wenn man integrirt, und bede dass die Zeit als die unabhängige veränderliche G se angesehen wird, und daher $ddt = 0$ ist,

$$\left(l. \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 2Gl \cos\varphi = C,$$

wo C die hinzuzufügende Constante ist. Es ist a $\frac{ld\varphi}{dt}$ nichts anders als die Geschwindigkeit des Pu tes; bezeichnen wir daher den Werth des Wink

, welcher die grösste Abweichung des Fadens von r Verticale angiebt, durch α, so ist zu gleicher it die Geschwindigkeit $l\frac{d\varphi}{dt} = 0$, und man hat so, wenn man diese gleichzeitigen Werthe von $\frac{ld\varphi}{dt}$ l φ in voriger Gleichung substituirt,

$$-2Gl\cos\alpha = C$$

lich, wenn man aus beiden Gleichungen die Conte eliminirt, und die Wurzel auszieht

$$l\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\alpha} : \sqrt{lG}.$$

Wir wählen das negative Zeichen bei Ausziehung Quadratwurzel, weil der Winkel φ abnimmt, rend die Zeit zunimmt.

§. 399.

Nun ist bekanntlich

$$2\cos\varphi = 2 - 4\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$$
$$2\cos\alpha = 2 - 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

lich wird vorige Gleichung diese Form erhalten

$$\frac{ld\varphi}{dt} = -2\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}\cdot\sqrt{l.G}$$

r auch

$$\sqrt{G}\,\frac{2dt}{\sqrt{l}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}}.$$

Bezeichnen wir durch T die Zeit einer ganzen wingung, während welcher der Winkel φ von $-\alpha$ abnimmt, so kommt aus obiger Gleichung Integration

$$2T\sqrt{\frac{G}{l}} = -\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}},$$

von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = -\alpha$ integrirt werden muss, r setzen nun der leichtern Integration wegen

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sin\tfrac{1}{2}\alpha.\sin u.$$

ächst $\sin u$ von $+1$ bis -1, und indem wir ründliche Grösse u statt φ einführen, erhalir

$$T\sqrt{\frac{G}{l}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin u^2}},$$

wo nun wegen der Veränderung des Zeichens vor der Integralformel, auch die Gränzen umkehren muss, also von $u = -\frac{1}{2}\pi$ bis $u = +\frac{1}{2}\pi$ integrirt wird.

§. 400.

Will man die Integration wirklich ausführen, so ist es nothwendig, die Wurzelgrösse in eine Reihe zu verwandeln, die nach den graden Potenzen von $\sin u$ fortschreitet, und man erhält dann

$$T\sqrt{\frac{G}{l}} = \int du \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\alpha^2 . \sin u^2 \\ + \frac{1.3}{2.4} \sin\frac{1}{2}\alpha^4 \sin u^4 \\ + \frac{1.3.5.}{2.4.6.} \sin\frac{1}{2}\alpha^6 \sin u^6 \\ + \text{etc. etc. etc.} \end{array} \right\}.$$

Man sieht hieraus, dass jedes zu findende Integral die Form

$$\int \sin u^{2n} . du. \left[\begin{array}{l} u = -\frac{1}{2}\pi \\ u = +\frac{1}{2}\pi \end{array} \right]$$

erhält, wo die in den Klammern enthaltenen Werthe von u die Gränzen bedeuten, zwischen denen das Integral enthalten seyn soll. Betrachtet man die Potenz $\sin u^{2n}$ als ein Product von $\sin u^{2n-1}$, $\sin u$, und be-

An den Gränzen des Integrals wird $\cos u = 0$, o bleibt blos

$$\int \sin u^{2n}\, du = \frac{2n-1}{2n} \int \sin u^{2n-2}\, du.$$

Nimmt man zuerst $n = 1$, so erhält man

$$\int \sin u^2 . du = \tfrac{1}{2} \int du = \tfrac{1}{2}\pi$$

o wenn nach und nach $n = 2, 3, 4$ u. s. w. gesetzt wird,

$$\int \sin u^4 . du = \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4}\pi$$
$$\int \sin u^6 . du = \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{5}{6}\pi$$
$$\int \sin u^8 . du = \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{5}{6} . \tfrac{7}{8}\pi$$

etc. etc. etc.

Substituirt man diese Werthe in vorige Gleichung, kommt:

$$T\sqrt{\frac{G}{l}} = \pi . \left\{ \begin{array}{l} 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2 \\ + \left(\frac{1.3.}{2.4.}\right)^2 . \sin \tfrac{1}{2}\alpha^4 \\ + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \sin \tfrac{1}{2}\alpha^6 \\ + \text{etc. etc.} \end{array} \right.$$

Da der Winkel α, um welchen sich das Pendel n der Verticale entfernt, immer sehr klein bleibt, ist die Convergenz dieser Reihe sehr beträchtlich, d wenige Glieder reichen hin, dieselbe mit aller thigen Genauigkeit in Zahlen darzustellen. Setzt n α unendlich klein oder Null, so ist,

$$T.\sqrt{G} = \pi\sqrt{l}$$

d wenn man für T die Zeit einer Secunde, oder n 86400ten Theil eines mittlern Sonnentages annmt, und diese als die Einheit betrachtet, so erhält n die Länge des sogenannten Secundenpendels, rch die Gleichung

$$G = \pi\pi l.$$

§. 401.

Aus §. 368. haben wir die Gleichung

$$G = G^\circ + \sin\psi^2 . G^\circ (\tfrac{5}{2}\gamma - K)$$

) G° die Schwere unter dem Aequator, γ das Verltniss der Schwungkraft zur Schwere an demselben te, K die Abplattung der Erde, und ψ die geo-

centrische Breite des Ortes bedeutet, für welchen man die Schwere G sucht. Da aber, wenn wir in der Formel für die Schwere, die höhern Potenzen der Abplattung und Schwungkraft vernachlässigen, die geocentrische Breite von der geographischen nicht verschieden ausfällt, so wird man ψ in der Bedeutung der geographischen Breite oder Polhöhe annehmen können.

Setzt man diesen Werth von G in die Gleichung $G = \pi\pi l$, so erhält man

$$\pi\pi l = G^0 + \sin\psi^2\ G^0\left(\tfrac{5}{2}\gamma - K\right).$$

§. 402.

Man sieht leicht, dass wenn an zwei verschiedenen Oertern der Erde, deren Polhöhen bekannt sind, die Längen des Secundenpendels gemessen werden, daraus die Grössen G^0 und K bestimmt werden können, da die Grösse $G^0\gamma$ sich aus dem bekannten Halbmesser der Erde, und der Rotationszeit derselben um ihre Axe, berechnen lässt. Denn es seyen die beobachteten Pendellängen l', l'', die Polhöhen ψ', ψ'', so ist, wenn man diese Werthe in vorige Gleichung substituirt

$$\pi\pi l' = G^0 + \tfrac{5}{2}\sin\psi'^2\ G^0\gamma - KG^0\sin\psi'^2$$
$$\pi\pi l'' = G^0 + \tfrac{5}{2}\sin\psi''^2\ G^0\gamma - KG^0\sin\psi''^2.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so wird

$$\pi\pi(l' - l'') = \left(\tfrac{5}{2}G^0\gamma - KG^0\right)(\sin\psi'^2 - \sin\psi''^2)$$

also hieraus

$$KG^0 = \tfrac{5}{2}G^0\gamma - \frac{\pi\pi(l' - l'')}{\sin\psi'^2 - \sin\psi''^2}.$$

Hat man hieraus KG^0 gefunden, so substituire man diesen Werth in die erste Gleichung, so dass man

$$G^0 = \pi\pi l' - \frac{\pi\pi(l' - l'')}{\sin\psi'^2 - \sin\psi''^2}\sin\psi'^2$$

erhält.

§. 403.

s ein hierher gehöriges Beispiel, wollen wir on Sabine auf Spitzbergen und St. Thoangestellte Beobachtungen wählen. Man hat t:

:bergen $l' = 39''21460$, $\psi' = 79^{\circ}\ 49'\ 58''$
Thomas $l'' = 39,02074$, $\psi'' = 0.\ 24.\ 41.$
e Längen der Secundenpendel in englischen angegeben sind.

ir müssen nun zuerst die Grösse $G^{o}\gamma$ oder ıwungkraft am Aequator berechnen, und aus finden wir, dass wenn der Halbmesser des ors durch a bezeichnet wird,

$$G^{o}\gamma = \frac{4\pi\pi}{TT}\,a$$

die Anzahl der Secunden der mittlern Sonnendeuten, welche die Erde gebraucht, um sich um ihre Axe zu drehen. Der Halbmesser a ı englischen Zollen ausgedrückt werden, weil dern Längen in demselben Maasse angegeben Es ist aus §. 242.

$$a = 3271837{,}5 \text{ Toisen.}$$

ı der pariser Fuss sich zum englischen wie) zur Einheit verhält, so hat man

$$a = 12.6.3271837{,}5 \cdot 1{,}06575 \text{ engl. Zoll}$$
$$\log a = 8.3997796.$$

er ist die Rotationszeit der Erde 0,99727 des ı Sonnentages, also

$$T = 86400''.\ 0{,}99727$$
$$\log T = 4.9353265$$

erdurch erhält man

$$\log G^{o}\gamma = 0.1254864$$
$$G^{o}\gamma = 1{,}33502 \text{ engl. Zoll}$$
$$\tfrac{1}{2} G^{o}\gamma = 3{,}33755.$$

ıs den Formeln des vorigen Paragraphs ergiebt ann mit Berücksichtigung der angenommenen ischen Werthe

$$KG^{o} = 1{,}3616 \text{ Zoll}$$
$$G^{o} = 385{,}0576 \text{ Zoll.}$$

ie Abplattung $K = \frac{1}{283}$.

§. 404.

Da die Abplattung, wie man aus den vorigen Gleichungen sieht, durch sehr kleine Grössen, nämlich die Unterschiede der Pendellängen, gefunden wird, so kann man leicht schliessen, dass geringe Fehler in den Bestimmungen der Länge des Secundenpendels, bedeutende Aenderungen der daraus berechneten Abplattung hervorbringen werden. Ausserdem kann an einem Orte die Schwere etwas grösser oder geringer seyn, als es die Theorie angiebt, wozu die ungleichartige Beschaffenheit der obern Schichten der Erde die Veranlassung ist; denn es ist leicht einzusehen, dass wenn an einer Stelle sich tief unter die Oberfläche hinab, Felsenmassen erstrecken, die Anziehung der Erde an diesem Orte stärker seyn wird, als wenn sich daselbst Höhlungen befänden. Man sieht hieraus, dass die Intensität der Schwere, eben so wohl, wie ihre Richtung, localen Störungen unterworfen seyn wird, und man könnte wohl annehmen, dass fast nirgends eine vollständige Uebereinstimmung der Natur mit der Theorie statt findet.

§. 405.

Will man daher aus Pendelbeobachtungen ein genügendes Resultat, sowohl für die daraus entspringende Abplattung, als die Kraft der Schwere unter

$\pi\pi(l + \delta l) = G^0 + \frac{1}{2} \sin\psi'^2\, G^0\gamma - KG^0 \sin\psi'^2$

er auch

$$\delta l = -l + \frac{G^0}{\pi\pi} + \frac{5}{2} \cdot \sin\psi'^2 \frac{G^0}{\pi\pi} - K \cdot \frac{G^0}{\pi\pi} \cdot \sin\psi'^2.$$

Man setze ferner, da Näherungsweise $G^0 = 39 \cdot \pi\pi$, $= \frac{1}{300}$ ist

$$\frac{G^0}{\pi\pi} = 39 + x$$

$$K = \frac{1}{300} + \frac{\gamma}{39},$$

d es wird, indem man bemerkt, dass aus vorigem ragraph

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{G^0\gamma}{\pi\pi} = 0{,}33816$$

id zugleich das Product xy vernachlässigt

$$\delta l = -l + 39 + 0{,}20816 \sin\psi^2 + x\left(1 - \frac{\sin\psi^2}{300}\right) - \sin\psi^2 \cdot y.$$

Man kann nun wohl annehmen, dass der Werth n $\frac{G^0}{\pi\pi}$ von dem genäherten Werthe 39 nur um ein ler zwei Hunderttheile abweicht, und wir werden her den Factor von x, ohne Fehler, der Einheit ich setzen können, so dass

$$\delta l = 0 = -l + 39 + 0{,}20816 \sin\psi^2 + x - y \sin\psi^2$$

Gleichung ist, aus welcher die Bedingungsglei- ungen gebildet werden müssen.

§. 406.

Wir nehmen zuerst die Beobachtungen von Sane (An Account of Experiments to determine the figure of the Earth, by Edward bine. London 1825. pag. 333.)

St. Thomas	$\psi = +00^\circ\ 24'\ 41''$,	$l = 39{,}02074$ engl. Z.
Maranham	$-02.\ 31.\ 43$,	$39{,}01214$
Ascension	$-07.\ 55.\ 48$,	$39{,}02410$
rra Leona	$+08.\ 29.\ 28$,	$39{,}01997$

Trinidad	$\psi = +10^\circ\ 38'\ 56''$,	$l = 39{,}01884$ engl.
Bahia	$-12.\ 59.\ 21$,	39,02425
Jamaica	$+17.\ 56.\ 07$,	39,03510
New York	$+40.\ 42.\ 43$,	39,10168
London	$+51.\ 31.\ 08$,	39,13929
Drontheim	$+63.\ 25.\ 54$,	39,17456
Hammerfest	$+70.\ 40.\ 05$,	39,19519
Grönland	$+74.\ 32.\ 19$,	39,20335
Spitzbergen	$+79.\ 49.\ 58$,	39,21469.

Gleichungen für x

$$
\begin{aligned}
0 &= -0{,}02073 + x - 0{,}00005\,y\\
0 &= -0{,}01172 + x - 0{,}00195\,y\\
0 &= -0{,}01996 + x - 0{,}01903\,y\\
0 &= -0{,}01543 + x - 0{,}02180\,y\\
0 &= -0{,}01173 + x - 0{,}03415\,y\\
0 &= -0{,}01373 + x - 0{,}05052\,y\\
0 &= -0{,}01537 + x - 0{,}09483\,y\\
0 &= -0{,}01313 + x - 0{,}42544\,y\\
0 &= -0{,}01174 + x - 0{,}61280\,y\\
0 &= -0{,}00806 + x - 0{,}79995\,y\\
0 &= -0{,}00985 + x - 0{,}89041\,y\\
0 &= -0{,}00999 + x - 0{,}92893\,y\\
0 &= -0{,}01303 + x - 0{,}96884\,y.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Fundamentalgleichung

$$0 = -0{,}17447 + 13\,x - 4{,}84870\,y.$$

Gleichungen für y

$$
\begin{aligned}
0 &= +0{,}00000 - 0{,}00005\,x + 0{,}00000\,y\\
0 &= +0{,}00000 - 0{,}00195\,x + 0{,}00000\,y\\
0 &= +0{,}00038 - 0{,}01903\,x + 0{,}00036\,y\\
0 &= +0{,}00032 - 0{,}02180\,x + 0{,}00048\,y\\
0 &= +0{,}00039 - 0{,}03415\,x + 0{,}00117\,y\\
0 &= +0{,}00068 - 0{,}05052\,x + 0{,}00255\,y\\
0 &= +0{,}00147 - 0{,}09483\,x + 0{,}00899\,y\\
0 &= +0{,}00558 - 0{,}42544\,x + 0{,}18100\,y\\
0 &= +0{,}00717 - 0{,}61280\,x + 0{,}37552\,y\\
0 &= +0{,}00645 - 0{,}79995\,x + 0{,}63993\,y\\
0 &= +0{,}00876 - 0{,}89041\,x + 0{,}79283\,y\\
0 &= +0{,}00929 - 0{,}92893\,x + 0{,}86291\,y\\
0 &= +0{,}01262 - 0{,}96884\,x + 0{,}93865\,y
\end{aligned}
$$

also die Fundamentalgleichung für y

$$0 = +0{,}05311 - 4{,}84870\,x + 3{,}80439\,y.$$

§. 407.

Andere Beobachtungen stellte Sabine *) auf der sten Reise von Parry an, nämlich:

Brassa	$\psi = 60°.\ 09'\ 42''$,	$l =$	39,16929
are Island	$= 70\ .\ 26.\ 17$,		39,19840
Melville	$= 74\ .\ 47.\ 12$,		39,20700.

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01267 + x - 0{,}75244\,y$$
$$0 = -0{,}01359 + x - 0{,}88789\,y$$
$$0 = -0{,}01318 + x - 0{,}93114\,y$$

ıo die Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}03944 + 3x - 2{,}57147\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = +0{,}01022 - 0{,}75244\,x + 0{,}56617\,y$$
$$0 = +0{,}01205 - 0{,}88789\,x + 0{,}78835\,y$$
$$0 = +0{,}01227 - 0{,}93114\,x + 0{,}86703\,y$$

eraus die Fundamentalgleichung für y

$$0 = +0{,}03454 - 2{,}57147\,x + 2{,}22155\,y.$$

§. 408.

Beobachtungen von Kater in England (Philosoıical Transactions. 1819. S. 416.)

ıanklin Farm	$\psi = 50°\ 37'\ 24''$,	$l =$	39,13614
Arbury Hill	$52.\ 12.\ 55$,		39,14250
Clifton	$53.\ 27.\ 43$,		39,14600
Fort Leith	$55.\ 58.\ 41$,		39,15554
Portsoy	$57.\ 40.\ 59$,		39,16159
Unst	$60.\ 45.\ 28$,		39,17146

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01078 + x - 0{,}59750\,y$$
$$0 = -0{,}01249 + x - 0{,}62460\,y$$
$$0 = -0{,}01163 + x - 0{,}64554\,y$$
$$0 = -0{,}01256 + x - 0{,}68694\,y$$

*) Man sehe Philosophical Transactions. 1821. II. Theil. S. 189.

und durch die bei Paris angegebene dividirt. Hierdurch ergiebt sich folgendes Tableau:

Paris	$\psi = +48^\circ\ 50'\ 14''$,	$l = 39{,}12805$
Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	39,04247
Cap de bonne Esp.	$-33.\ 55.\ 15$,	39,07691
Isle de France	$-20.\ 9.\ 56$,	39,04664
Kowak	$-\ 0.\ 1.\ 34$,	39,01353
Guam	$+13.\ 27.\ 51$,	39,03298
Mowi	$+20.\ 52.\ 7$,	39,04610
Port Jackson	$-33.\ 51.\ 33$,	39,07921
Malvinen	$-51.\ 35.\ 18$,	39,13589.

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01008 + x - 0{,}56677\,y$$
$$0 = -0{,}01090 + x - 0{,}15167\,y$$
$$0 = -0{,}01209 + x - 0{,}31142\,y$$
$$0 = -0{,}02192 + x - 0{,}11884\,y$$
$$0 = -0{,}01353 + x - 0{,}00000\,y$$
$$0 = -0{,}02170 + x - 0{,}05421\,y$$
$$0 = -0{,}01970 + x - 0{,}12690\,y$$
$$0 = -0{,}01439 + x - 0{,}31042\,y$$
$$0 = -0{,}00809 + x - 0{,}61398\,y$$

also die Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}13240 + 9\,x - 2{,}25421\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = +0{,}00567 - 0{,}56677\,x + 0{,}32124\,y$$
$$0 = +0{,}00168 - 0{,}15167\,x + 0{,}02300\,y$$

eter ausgedrückt, und beziehen sich nicht auf das herige Sexagesimalsecundenpendel, sondern auf das cimalsecundenpendel, welches in einem mittlern nnentage 100000 Schwingungen macht. Die Beobhtungen sind folgende, aus Recueil d'Observaons géodesiques, astronomiques et physiues, par Biot et Arago.

rmentera	$\psi = 38° 39' 56''$,	$l = 0{,}74125200$ Meter
Figeac	44. 36. 45 ,	0,74161228
ourdeaux	44. 50. 26 ,	0,74160872
Clermont	45. 46. 48 ,	0,74170518
Paris	48. 50. 14 ,	0,74191749
ünkirchen	51. 02. 10 ,	0,74207703
rth Leith	55. 58. 37 ,	0,74241343
Unst	60. 45. 25 ,	0,74272314.

Um diese Beobachtungsreihe an die frühern anhliessen zu können, müssen wir die gefundenen ängen auf englische Zoll, und dann das Decimalndel auf das Sexagesimalpendel reduciren. Zu der sten Reduction sind die nothwendigen Data schon i Freycinet's Beobachtungen angegeben worden. Um e zweite auszuführen, hat man aus den frühern aragraphen die Gleichung

$$T\sqrt{G} = \pi\sqrt{l}$$

ler, indem man quadrirt

$$TT\sqrt{G} = \pi\pi l$$

nd man sieht hieraus, dass bei gleicher Kraft der chwere G, die Pendellängen sich wie die Quadrate er Zeiten verhalten, in denen die Pendel eine Oscillation vollbringen. Nun sind die Zeiten zu einaner im Verhältniss von 86400 : 100000, folglich verält sich das Decimalpendel zum Sexagesimalpendel rie $864^2 : 1000^2$, und wir müssen daher vorige Länen mit $\left(\frac{1000}{864}\right)^2$ multipliciren. Auf diese Weise erält man

Formentera	$l = 39{,}09364$ engl. Zoll
Figeac	39,11264
Bourdeaux	39,11245
Clermont	39,11755
Paris	39,12874
Dünkirchen	39,13715

Fort Leith $l = 39{,}15489$ engl. Zoll
Unst $39{,}17123$.

Gleichungen für x

$0 = -0{,}01239 + x - 0{,}39034\,y$
$0 = -0{,}00997 + x - 0{,}49324\,y$
$0 = -0{,}00975 + x - 0{,}49721\,y$
$0 = -0{,}01064 + x - 0{,}51361\,y$
$0 = -0{,}01077 + x - 0{,}56677\,y$
$0 = -0{,}01131 + x - 0{,}60456\,y$
$0 = -0{,}01191 + x - 0{,}68694\,y$
$0 = -0{,}01275 + x - 0{,}76138\,y.$

Hieraus erhält man die Fundamentalgleichung für
$0 = -0{,}08950 + 8x - 4{,}51405\,y.$

Gleichungen für y

$0 = +0{,}00488 - 0{,}39034\,x + 0{,}15237\,y$
$0 = +0{,}00493 - 0{,}49324\,x + 0{,}24328\,y$
$0 = +0{,}00493 - 0{,}49721\,x + 0{,}24722\,y$
$0 = +0{,}00515 - 0{,}51361\,x + 0{,}26380\,y$
$0 = +0{,}00570 - 0{,}56677\,x + 0{,}32123\,y$
$0 = +0{,}00684 - 0{,}60456\,x + 0{,}36550\,y$
$0 = +0{,}00817 - 0{,}68694\,x + 0{,}47189\,y$
$0 = +0{,}00970 - 0{,}76138\,x + 0{,}57970\,y$

also die Fundamentalgleichung für y
$0 = +0{,}05030 - 4{,}51405\,x + 2{,}64499\,y.$

§. 412.

Wir müssen nun die Fundamentalgleichung zuerst für x als für y, addiren. Die für x sind

$0 = -0{,}17447 + 13x - 4{,}84870\,y$
$0 = -0{,}03944 + 3x - 2{,}57147\,y$
$0 = -0{,}07337 + 6x - 4{,}03016\,y$
$0 = -0{,}10320 + 8x - 1{,}24354\,y$
$0 = -0{,}13240 + 9x - 2{,}25421\,y$
$0 = -0{,}08950 + 8x - 4{,}51405\,y$

also die Summe
$0 = -0{,}61238 + 47x - 19{,}46213\,y.$

Die Fundamentalgleichungen für y sind
$0 = +0{,}05311 - 4{,}84870\,x + 3{,}80439\,y$
$0 = +0{,}03454 - 2{,}57147\,x + 2{,}22155\,y$

$$0 = +\ 0{,}04948 - 4{,}03016x + 2{,}72552y$$
$$0 = +\ 0{,}01515 - 1{,}24354x + 0{,}27674y$$
$$0 = +\ 0{,}02672 - 2{,}25421x + 0{,}94761y$$
$$0 = +\ 0{,}05030 - 4{,}51405x + 2{,}64499y$$

o ihre Summe

$$0 = +\ 0{,}22930 - 19{,}46213x + 12{,}62080y. \quad (B)$$

§. 413.

Löst man die Gleichungen (A) und (B) auf, um unbekannten Grössen x und y zu erhalten, so det man

$$x = 0{,}0152333$$
$$y = 0{,}0053223$$

d hieraus die Pendellänge unter dem Aequator

$$= \frac{G^\circ}{\pi\pi} = 39 + x = 39{,}015233 \text{ engl. Zoll}$$

ner die Abplattung

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39} = \frac{1}{288{,}20}$$

o bedeutend grösser als aus den Gradmessungen.

Die Schwere am Aequator wird

$$G^\circ = 385{,}0649 \text{ engl. Zoll}$$
$$= 30{,}10906 \text{ pariser Fuss}$$
$$= 9{,}78061 \text{ Meter.}$$

s Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere am quator erhält man

$$\gamma = \frac{1}{288{,}44}.$$

e allgemeine Formel für die Pendellänge

$$l = \frac{G^\circ}{\pi\pi} + \sin\psi^2 . \frac{G^\circ}{\pi\pi} [\tfrac{1}{2}\gamma - K]$$

rd, indem wir die gefundenen numerischen Werthe stituiren

$$l = 39''015233 + 0''202898 \sin\psi^2$$

durch man die Länge des Pendels in englischen llen erhält.

§ 414.

[illegible] wollen wir die bei den einzelnen M[illegible] [illegible] Fehler aufsuchen; wir finden [illegible] wir die vorigen Werthe von x und y [illegible] Bedingungsgleichungen substituiren, d[illegible] [illegible] der Messung an, welch[illegible] [illegible]. Man erhält auf diese We[illegible]

St. Thomas	$l =$ [illegible]2074,	$\delta l = -$ 0,[illegible]
[illegible]	[illegible]1214,	+ 0,[illegible]
[illegible]	[illegible]2410,	− 0,[illegible]
[illegible]	[illegible]1997,	− 0,[illegible]
[illegible]	[illegible]1884,	+ 0,
[illegible]	[illegible]2425,	+ 0,
[illegible]	[illegible]3510,	− 0,
[illegible]	[illegible]10168,	− 0,
[illegible]	[illegible]15929,	+ 0,
[illegible]	[illegible]17456,	+ 0,
[illegible]	[illegible]19,	+ 0,
[illegible]	[illegible]35,	+ 0,
[illegible]	[illegible]1469,	− 0,
[illegible]	$l =$ [illegible],	$\delta l = -$ 0,
[illegible]	[illegible]840,	− 0
[illegible]	[illegible]0,	− 0,

Paris	$l = 39{,}12805$,	$\delta l = + 0{,}00213$
le Janeiro	39,04247,	+ 0,00344,
: bon. Esp.	39,07691,	+ 0,00149
de France	39,04664,	— 0,00731
Rawak	39,01353,	+ 0,00171
Guam	39,03298,	— 0,00674
Mowi	39,04610,	— 0,00514
t Jackson	39,07921,	— 0,00080
Malwinen	39,13589,	+ 0,00389.
ormentera	$l = 39{,}09364$,	$\delta l = + 0{,}00079$
Figeac	39,11264,	+ 0,00264
Bourdeaux	39,11245,	+ 0,00285
Clermont	39,11755,	+ 0,00185
Paris	39,12874,	+ 0,00144
ünkirchen	39,13715,	+ 0,00063
Fort Leith	39,15489,	— 0,00034
Unst	39,17123,	— 0,00157.

ie Summen der Quadrate der Fehler in den nen Beobachtungsreihen sind

0,0000966176
0,0000202389
0,0000086229
0,0000531929
0,0001361505
0,0000241897

lie ganze Summe der Quadrate

= 0,0003390125.

ur Bestimmung der beiden Grössen x und y wir 47 Gleichungen angewendet. Dividiren laher diese Summe durch $47 - 2$, und ziehen lem Quotienten die Quadratwurzel, so erhalten len mittlern Fehler, der bei der Messung von ellängen begangen werden kann,

= 0,00274474 englische Zoll.

; ist wohl zu bemerken, dass die vorigen durch zeichneten Fehler, nicht blos die bei der eigent- ı Bestimmung der Pendellängen begangenen Ir- :n enthalten, sondern auch zugleich durch die ıach der geognostischen Beschaffenheit der Erd- läche ändernde Intensität der Schwere afficirt

§. 415.

Um die Gewichte der gefundenen Werthe von x und y zu erhalten, schreibe man die zur Bestimmung dieser Grössen gebrauchten Gleichungen so:

$$X = -0{,}61238 + 47x - 19{,}46213y$$
$$Y = +0{,}22930 - 19{,}46213x + 12{,}62080y.$$

Giebt nun denselben dann die Form

$$x = A + BX + CY$$
$$y = A + BX + CY,$$

so wird (§. 238.), $\frac{1}{B}$ das Gewicht von x, $\frac{1}{C}$ das Gewicht von y seyn. Man erhält auf diese Art

das Gewicht von $x = 16{,}988$
das Gewicht von $y = 4{,}562$

und hieraus der mittlere zu befürchtende Fehler

im Werthe von $x = \frac{0{,}00274474}{\sqrt{16{,}988}} = 0{,}00066594$

im Werthe von $y = \frac{0{,}00274474}{\sqrt{4{,}562}} = 0{,}0012851$

Folglich wird die Pendellänge unter dem Aequator, die wir $= 39{,}013233$ engl. Zoll fanden, zwischen $39{,}014567$ und $39{,}011899$ nothwendig enthalten seyn müssen. Die Abplattung war $= \frac{1}{288}$; die sich aus

§. 416.

Das Tableau der Messungen der Pendellängen, elches wir §. 414. gegeben haben, zeigt, dass an ehren Orten, wie zu St. Thomas, Ascension, Isle France, Guam und Mowi, die Unterschiede zwihen den beobachteten und berechneten Längen betend sind, so dass an diesen Oertern eine Abweiung der Intensität der Schwere augenscheinlich ist. ehmen wir z. B. die beobachtete Pendellänge

Isle de France = 39″04664

sollte der Theorie zufolge an diesem Orte die inge 39″04664 — 0,00731 = 39″03933 tragen. Gesetzt nun, das letztere Pendel macht in nem mittlern Sonnentage 86400 Schwingungen, und s beobachtete s Schwingungen, so ist die Zeit einer scillation für das berechnete $= \frac{1}{86400}$, für das beachtete $\frac{1}{s}$. Die Formel für die Pendelschwingun- m §. 400.

$$T\sqrt{G} = \pi\sqrt{l}$$

igt ferner, dass die Quadrate der Schwingungszeim, sich wie die Längen der Pendel verhalten. Man hält daher zur Bestimmung von s die Proportion

$$39{,}04664 : 39{,}03933 = \frac{1}{ss} : \left(\frac{1}{86400}\right)^2$$

nd hieraus

$$s = 86400\sqrt{\frac{39{,}03933}{39{,}04664}}$$

$$\begin{aligned} log\ 39{,}03933 &= 1.5915023 \\ log\ 39{,}04664 &= 1.5915836 \\ 2 : & \overline{9.9999187} \\ & 9.9999593. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log\ 86400 &= 4.9365137 \\ log\ s &= 4.9364730 \\ s &= 86391{,}9 \end{aligned}$$

lso hatte das Pendel 8,1 Schwingungen weniger gemacht, welcher Unterschied zu gross ist, als dass

§. 419.

Wir wollen die §. 413. gefundene Formel das Gesetz der Länge des Secundenpendels unter verschiedenen geographischen Breiten, noch mit gen andern Messungen vergleichen, die früher macht sind, und denen man nicht die Genaui zuschreiben kann, als diejenigen besitzen, welche Berechnung des Ausdrucks der Pendellänge gebra sind. Die Formel war

$$l = 39{,}015233 + 0{,}202898 \sin \psi^2$$

wo l die Länge des Sexagesimalsecundenpendel englischen Zollen, und ψ die Breite des Beob tungsortes bedeutet. Ich entnehme die Data der obachtungen aus Mecanique céléste, Tom pag. 147.

	Breite	Länge des Pendels
1)	0°00	0,99669
2)	10,61	0,99689
3)	13,25	0,99710
4)	20,00	0,99745
5)	20,50	0,99728
6)	37,69	0,99877
7)	48,44	0,99950
8)	53,57	0,99987
9)	54,26	1,00000
10)	56,63	1,00006
11)	57,22	1,00018
12)	64,72	1,00074
13)	66,60	1,00101
14)	74,22	1,00137
15)	74,53	1,00148.

Die erste Beobachtung ist unter dem Aequ in Peru, die zweite in Portobello von Bouguer macht, die dritte von le Gentil in Pondichery, vierte von Campell in Jamaica, die fünfte von B guer auf Klein Goave, die sechste von Lacaille Vorgebirge der guten Hoffnung, die siebente Darquier in Toulouse, die achte von Liesganig Wien, die neunte in Paris von Bouguer, die zel in Gotha von Zach, die eilfte in London von C ham, die zwölfte von Grischow in Arensberg,

und funfzehnte von Mallet in Petersburg , und endlich die vierzehnte von Matper- llo.

§. 420.

e Breiten der Beobachtungsörter in Deci- angegeben sind, so müssen wir dieselben ewöhnlichen Sexagesimalgrade reduciren, wir zugleich für das als Einheit angenom- undenpendel 39″12805 englische Zoll nach 410.) setzen, so erhalten wir folgendes

Breite	beobacht. Länge	Fehler
0′ 0″	38,99855	— 0,01668
32. 56.	39,00636	— 0,01450
55. 30.	39,01457	— 0,00152
0. 0.	39,02828	— 0,00632
27. 0.	39,02161	— 0,01303
55. 16.	39,07992	+ 0,00148
35. 46.	39,10849	— 0,00322
12. 47.	39,12296	— 0,00507
50. 2.	39,12805	— 0,00216
58. 1.	39,13035	— 0,00731
29. 53.	39,13510	— 0,00441
14. 53.	39,15620	— 0,00573
56. 24.	39,16763	+ 0,00041
47. 53.	39,18163	— 0,00501
4. 37.	39,18595	— 0,00141.

hler müssen mit entgegengesetzten Zeichen bachteten Längen hinzugefügt werden, um neten zu erhalten, und man sieht daraus, endel zu klein gefunden sind.

§. 421.

wir bei der Reduction der §. 419. ange- oportionalen Längen des Pendels, statt der a Bestimmung der absoluten Länge, die er unter dem Aequator zum Grunde, wel- Länge des Sexagesimalsecundenpendels z iser Linien angiebt, so erhalten wir fo

[illegible] Zoll.

[illegible]	[illegible]	— 0,00788
[illegible]		— 0,00570
[illegible]		— 0,00628
[illegible]		— 0,00248
[illegible]		— 0,00423
[illegible]		— 0,01028
[illegible]		— 0,00568
[illegible]		— 0,00373
[illegible]		— 0,00664
[illegible]		— 0,00149
[illegible]		— 0,00439
[illegible]		— 0,00307
[illegible]		— 0,00921
[illegible]		— 0,00579
[illegible]		— 0,00739

[illegible]

[illegible] der Mon[illegible] von Zach [illegible] Schwingungen [illegible] von Malaspina [illegible] Corvetten Des[illegible] Gabr[illegible] Angal[illegible]

t. - Ort	Breite	Oscillation in einer Stunde.
Helena	— 44. 30.	3612,37
Nutka	+ 49. 35.	3612,21
gmont	— 51. 21.	3612,73
grave	+ 59. 33.	3614,85.

sey nun die unbekannte Länge des hierbei hten Pendels $= \lambda$, und t die Zeit, in welcher die Schwingung vollendete, so hat man nach

$$t\sqrt{G} = \pi\sqrt{\lambda}.$$

Länge des Secundenpendels unter dem Aebezeichne man durch L, die daselbst statt Schwere durch G°, so ist, indem man die als Einheit annimmt

$$\sqrt{G^\circ} = \pi\sqrt{L}.$$

von Malaspina gebrauchte Pendel machte in unde 3607 Schwingungen unter dem Aequator, das Secundenpendel nur 3600 macht; man er

$$= \frac{3600}{3607}, \quad \frac{3600}{3607}\sqrt{G^\circ} = \pi\sqrt{\lambda}.$$

wenn man aus dieser letztern Gleichung und ern $\sqrt{G^\circ} = \pi\sqrt{L}$, die unbekannte Grösse inirt, so kommt

$$\lambda = L.\left(\frac{3600}{3607}\right)^2$$

einem andern Orte sey für dasselbe Pendel Länge λ, die Schwingungszeit t', die Schwere wird

$$t'\sqrt{G'} = \pi\sqrt{\lambda}.$$

ausserdem $t\sqrt{G} = \pi\sqrt{\lambda}$, so erhält man

$$t'\sqrt{G'} = t\sqrt{G}$$

$$t'^2 : t^2 = G : G'.$$

ichnet man die Anzahl der Oscillationen an rten, die in einer Stunde vollbracht werden, nd s', so ist

$$t'^2 : t^2 = \frac{1}{s'^2} : \frac{1}{s^2}$$

enn man diese Proportion mit der vorigen

$$s^2 : s'^2 = G : G'.$$

acht.-Ort	Länge	Fehler
nto Video	39,08839	+ 0,00668
Cadix	39,08536	— 0,00177
Monterey	39,07475	— 0,01261
onception	39,08664	— 0,00106
St. Helena	39,13149	+ 0,01658
Nutka	39,12803	— 0,00481
to Egmont	39,13929	— 0,00329
Mulgrave	39,18524	+ 0,01922.

Die Fehler müssen mit entgegengesetzten Zeichen den beobachteten Längen hinzugefügt werden, n man die berechneten haben will.

§. 424.

Hebt man aus den §. 414. angegebenen Beobachörtern diejenigen aus, welche auf der südlichen kugel der Erde liegen, um aus ihnen allein die attung herzuleiten, so hat man

Maranham	$\psi = -02°\ 31'\ 43,'$,	$l = 39{,}01214$
Ascension	$-07.\ 55.\ 48$,	39,02410
Bahia	$-12.\ 59.\ 21$,	39,02425
Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	39,04381
Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	39,04368
Paramatta	$-33.\ 48.\ 43$,	39,07696
Paramatta	$-33.\ 48.\ 43$,	39,07751
Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	39,04247
Cap de b. Esp.	$-33.\ 55.\ 15$,	39,07691
Isle de France	$-20.\ 9.\ 56$,	39,04664
Rawak	$-0.\ 1.\ 34$,	39,01353
Port Jackson	$-33.\ 51.\ 34$,	39,07921
Malvinen	$-51.\ 35.\ 18$,	39,13589

man bekommt die

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01172 + x - 0{,}00195\,y$$
$$0 = -0{,}01996 + x - 0{,}01903\,y$$
$$0 = -0{,}01373 + x - 0{,}05052\,y$$
$$0 = -0{,}01224 + x - 0{,}15170\,y$$
$$0 = -0{,}01211 + x - 0{,}15170\,y$$
$$0 = -0{,}01251 + x - 0{,}30966\,y$$
$$0 = -0{,}01306 + x - 0{,}30966\,y$$

$$0 = -0{,}01090 + x - 0{,}15167\,y$$
$$0 = -0{,}01209 + x - 0{,}31142\,y$$
$$0 = -0{,}02192 + x - 0{,}11884\,y$$
$$0 = -0{,}01353 + x - 0{,}00000\,y$$
$$0 = -0{,}01439 + x - 0{,}31042\,y$$
$$0 = -0{,}00809 + x - 0{,}61398\,y$$

Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}17625 + 13\,x - 2{,}50055\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = +0{,}00000 - 0{,}00195\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = +0{,}00038 - 0{,}01903\,x + 0{,}00036\,y$$
$$0 = +0{,}00068 - 0{,}05052\,x + 0{,}00255\,y$$
$$0 = +0{,}00185 - 0{,}15170\,x + 0{,}02301\,y$$
$$0 = +0{,}00183 - 0{,}15170\,x + 0{,}02301\,y$$
$$0 = +0{,}00387 - 0{,}30966\,x + 0{,}09588\,y$$
$$0 = +0{,}00403 - 0{,}30966\,x + 0{,}09588\,y$$
$$0 = +0{,}00168 - 0{,}15167\,x + 0{,}02300\,y$$
$$0 = +0{,}00376 - 0{,}31142\,x + 0{,}09698\,y$$
$$0 = +0{,}00260 - 0{,}11884\,x + 0{,}01412\,y$$
$$0 = +0{,}00000 - 0{,}00000\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = +0{,}00443 - 0{,}31042\,x + 0{,}09636\,y$$
$$0 = +0{,}00495 - 0{,}61398\,x + 0{,}37687\,y$$

Fundamentalgleichung für y

$$0 = +0{,}03006 - 2{,}50055\,x + 0{,}84802\,y.$$

§. 425.

Aus den beiden Gleichungen

$$0 = -0{,}17625 + 13{,}00000\,x - 2{,}50055\,y$$
$$0 = +0{,}03006 - 2{,}50055\,x + 0{,}84802\,y$$

erhält man nun die Werthe von

$$x = +0{,}015089$$
$$y = +0{,}009045$$

folglich hieraus die Pendellänge unter dem Aequator

$$39 + x = 39{,}015089 \text{ engl. Zoll}$$

ferner die Abplattung

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39} = \frac{1}{280{,}34}.$$

Die auf der südlichen Seite der Erde angestellte Pendelbeobachtungen geben also die Abplattung b Weitem grösser, als die auf beiden Halbkugeln z sammengenommen.

§. 426.

Zieht man die beiden Gleichungen für x und y vorigen Paragraphs, von den Gleichungen (A) (B) des §. 412. ab, die alle Beobachtungen so- ıl auf der nördlichen als auf der südlichen Halb- el umfassen, so erhält man zwei Gleichungen zwi- ɜn x und y, welche natürlicherweise diejenigen l, welche man dann erhalten würde, wenn man ı zur Bestimmung dieser unbekannten Grössen, ı der auf der nördlichen Halbkugel angestellten bachtungen bedient hätte. Sie sind

$$0 = -0{,}43613 - 34{,}00000\,x - 16{,}96158\,y$$
$$0 = +0{,}19924 - 16{,}96158\,x + 11{,}77278\,y$$

l man erhält aus ihnen die Werthe

$$x = +0{,}0155896$$
$$y = +0{,}0055369$$

ɨlich hieraus die Pendellänge unter dem Aequator

$$39 + x = 39{,}0155896 \text{ engl. Zoll}$$

ıer die Abplattung

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39} = \frac{1}{287{,}75}.$$

§. 427.

Wir wollen nun zeigen, auf welche Art die Be- ıchtungen der Pendellängen angestellt werden, und lche Correctionen erforderlich sind, um die zur obachtung gebrauchten physischen Pendel auf das ıthematische Secundenpendel zu reduciren, welches leeren Raume an der Meeroberfläche schwingt, d dessen Schwingungen unendlich klein sind. Da ɜ Schwingungen des physischen Pendels immer sehr ɜin angenommen werden, so können wir uns bei m Gebrauch der früher entwickelten Formel (§. 400.)

$$T = \pi . \sqrt{\frac{l}{G}} . \left\{ \begin{matrix} 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{2}\alpha^2 \\ + \frac{9}{64} \sin \frac{1}{2}\alpha^4 + \ldots \end{matrix} \right\}$$

ɜ α den Winkel der grössten Ausweichung d ıdels von der Verticale bedeutet, immer auf ɜ adrat von α beschränken, indem wir die höh

rchschnittspunkt zugleich, an den Rand der Tafel
t. Nachdem diese Coincidenz statt gefunden hat,
fernen sich die Pendel wieder von einander, bis
: Winkel, den beide beim Eintreten in den Rand
r Tafel bilden, ein Maximum geworden ist; her-
ch nähern sie sich wieder, und zuletzt tritt eine
eite Coincidenz ein, deren Zeitpunkt man eben-
ls bemerken muss.

§. 429.

Aus dem Unterschiede der Zeiten, zu welchen
ese beiden Coincidenzen statt fanden, verbunden
it der Länge des gebrauchten Pendels, lässt sich
n die Länge des an dem Beobachtungsorte statt
idenden Secundenpendels bestimmen. Man begreift
er leicht, dass wegen den vielleicht vorkommenden
hlern in den Beobachtungen, da man die wahre
it der Coincidenz beider Pendel nur innerhalb der
ränzen von 30 bis 40 Secunden bestimmen kann,
nd genau genommen, eine mathematische Coincidenz
i der verticalen Lage der Pendel in welcher man
obachtet, wohl nie statt findet, diese Beobachtun-
n mehremal wiederholt werden müssen, und dann
us den einzelnen Bestimmungen, nach den gehörig
ngebrachten Reductionen, das arithmetische Mittel
enommen werden muss.

§. 430.

Die Beobachtung der Coincidenzen der Pendel,
ent zur Bestimmung der Anzahl der Schwingungen,
e das eine Pendel während des Zeitraums zweier
f einander folgenden Coincidenzen gemacht hat,
bald die Anzahl der Schwingungen des andern in
nselben Zeitraum bekannt ist. Da nun die ver-
ssene Secundenzahl, welche die Uhr angiebt, zu-
eich die Anzahl der Schwingungen des an der Uhr
findlichen Pendels bestimmt, so sieht man, dass
an sich hierdurch die Mühe erspart, die Schwin-
ngen des andern zu zählen. Wir bezeichnen das
der Uhr befindliche Pendel durch A, das andere
rch B, und nehmen an, man habe durch einen

vorläufigen Versuch gefunden, dass A während der Zeit in welcher B eine Schwingung macht, n Schwingungen + einem Theile einer Schwingung vollendet habe.

Fangen nun beide Pendel zugleich an zu schwingen, so wird, nachdem B eine Schwingung vollendet hat, A demselben vorausgeeilt seyn, und die $n+1$te Schwingung angefangen haben, welches ebenfalls bei jeder folgenden Schwingung des Pendels B geschieht; dieses setzt sich so lange fort, bis beide Pendel sich zugleich in ihren grössten Ausweichungen von der Verticale, auf entgegengesetzten Seiten derselben befinden, so dass dann A eine Schwingung mehr als die $n$fache Anzahl der Schwingungen von B beträgt, gemacht hat. Hierauf nimmt der Winkel zwischen beiden Pendeln wieder ab, indem, wenn B die grösste Ausweichung auf der einen Seite erreicht, A dieselbe auf der andern Seite schon verlassen hat, so dass endlich beide zu gleicher Zeit die grösste Ausweichung auf einer und derselben Seite erlangen; dann hat A noch eine Schwingung über die $n$fache Anzahl der Schwingungen von B genommen, und man sieht leicht, dass wenn man die Anzahl der Schwingungen von A durch N, die von B durch N' bezeichnet

$$N = n.\ N' + 2$$

seyn wird. Sollte A in der Zeit, in welcher B eine Schwingung macht, n Schwingungen — einem Theil einer Schwingung vollendet haben, so würde man durch eine ähnliche Schlussfolge wie vorhin, finden, dass man

$$N = n.\ N' - 2$$

haben muss. Bedeutet also N die Anzahl der Secunden die man zwischen zwei auf einander folgenden Coincidenzen beobachtet hat, so wird die Anzahl der Schwingungen des beobachteten Pendels durch die Formel

$$N' = \frac{N \mp 2}{n}$$

ausgedrückt, wo man das obere Zeichen nehmen muss, jenachdem das Uhrpendel mehr oder weniger als n Schwingungen, während einer Schwingung des andern Pendels macht.

§. 431.

Da die Uhren gewöhnlich ungefähr nach Stern-
it gehen, so müssen wir die beobachtete Anzahl
unden, oder die gleichgeltende Anzahl von Schwin-
gen des Uhrpendels, die zwischen zwei auf ein-
der folgenden Coincidenzen statt fand, auf mittlere
nnenzeit reduciren. Geht die Uhr genau nach
rnzeit, so wird ihr Pendel in einem Sterntage
00 Schwingungen machen; da dies aber nie genau
tt findet, so sei die Anzahl derselben $86400 + a$,
a gewöhnlich gegen 86400 nur klein ist, und sich
rch astronomische Beobachtungen leicht ausmitteln
st. Die Länge eines Sterntages in mittlerer Zeit
gedrückt, beträgt

$$23^h\ 56'\ 4''09 = 86164''09;$$

eichnet man also die Anzahl der Schwingungen,
das Pendel der Uhr in einem mittlern Sonnentage
acht, durch x, so wird man x durch die Proportion

$$86164''09 : 86400 = 86400 + a : x$$

den. Dies giebt

$$x = \frac{86400\ (86400 + a)}{86164{,}09}$$

$$= 86636''51 + a + 0{,}0027\,a.$$

So war z. B. bei den ersten Beobachtungen, die
rda anstellte, $a = 13''4$, folglich wird

$$x = 86650 \text{ Secunden.}$$

§. 432.

Bei der Untersuchung über die Länge eines Pen-
ls, welches seine Schwingungen in einer gegebenen
eit vollenden soll, setzt man immer voraus, dass
e Schwingungen unendlich klein sind. Da nun ein
des wirkliche Pendel immer endliche Bogen be-
hreibt, und hierzu nach §. 427. mehr Zeit erfor-
rlich ist, als zu einer unendlich kleinen Schwin-
ng, so sieht man leicht, dass in einem gegebenen
eitraume ein gewisses Pendel mehr unendlich kleine
hwingungen beschreibt, als die Beobachtung der
dlichen Schwingungen angiebt. Die Reduction der
obachteten endlichen Schwingungen auf die Anzal

der in demselben Zeitraum beschriebenen unendlich kleinen, würde nun sehr leicht seyn, wenn alle Schwingungsbogen immer gleich blieben, allein der Widerstand der Luft sowohl, als auch die, obgleich geringe, Reibung, vermindern nach und nach die Amplitude der Schwingungen, so dass zuletzt die Schwingungen zwar unendlich klein werden, aber dann nicht mehr zu beobachten sind.

Borda fand rücksichtlich des Ganges seines Pendels folgende Resultate:

Beobachtungszeit.	Grösste Ausweichung d. Pendels.
0^h	120'0
1 .	61,2
2 .	35,4
3 .	21,9
4 .	14,1
5 .	9,4
6 .	6,3
7 .	4,1
8 .	2,7
9 .	1,8
10 .	1,2
11 .	0,8
12 .	0,5.

Man könnte nun annehmen, dass das Pendel während der Zeit zweier Coincidenzen, eben so viel Schwingungen bei seinen veränderlichen Schwingungsbogen gemacht hätte, als ob die Ausweichung desselben immer constant, und zwar dem arithmetischen Mittel der Ausweichungen zur Zeit der beiden Coincidenzen gleich gewesen wäre. Bezeichnet man daher die erste Ausweichung durch 6, die zweite durch $6'$, so wird die mittlere Ausweichung des Pendels $\frac{6+6'}{2}$ seyn, und wenn man diesen Werth statt α in die Formel (§. 427.) setzt, so kommt

$$T = \pi . \sqrt{\frac{l}{G}} . \left(1 + \frac{(6+6')^2}{64}\right)$$

$$= \pi . \sqrt{\frac{l}{G}} . \left(1 + \left(\frac{6+6'}{8}\right)^2\right)$$

nun T die für alle Schwingungen gleich gross
nehmende Zeit bedeutet. Setzt man die Zeit, in
cher dasselbe Pendel seine unendlich kleinen
wingungen vollendet, $= T'$, so ist, weil dann
$= 0 = \delta'$

$$T' = \pi . \sqrt{\frac{l}{G'}},$$

lich, wenn man diesen Werth in obige Formel
stituirt

$$T = T' . \left[1 + \left(\frac{\delta + \delta'}{8}\right)^2\right].$$

Nun habe das Pendel wirklich m Schwingungen
nacht, so beträgt der ganze Zeitraum, innerhalb
sen die Schwingungen beobachtet sind, mT, und
an man die Anzahl der Schwingungen, welche
selbe Pendel bei unendlich kleinen Bögen in der-
ben Zeit gemacht hätte, durch m' bezeichnet, so ist

$$mT = m'T'$$

glich, wenn man statt T seinen Werth aus obiger
mel setzt, und durch T auf beiden Seiten dividirt

$$m' = m . \left[1 + \left(\frac{\delta + \delta'}{8}\right)^2\right].$$

Es sey z. B. $m = 2196$, $\delta = 64'$, $\delta' = 32'$, so hat man
$\frac{\delta - \delta'}{3} = 12$, oder da man dies auf Theile des Kreis-
gens, dessen Halbmesser $= 1$ ist, reduciren muss

$$\frac{\delta + \delta'}{8} = 0{,}0034907$$

d hierdurch ergiebt sich

$$m' = 2196{,}026758,$$

o würde das Pendel, wenn es nur unendlich kleine
gen beschrieben hätte, bei 2196 Schwingungen nur
gefähr den vierzigsten Theil einer Schwingung
hr gemacht haben.

Diese Art der Correction würde nun freilich bei
ar kleinen Bogen, von einigen Minuten, keinen
erklichen Fehler hervorgebracht haben, da die An-
hme des arithmetischen Mittels unter diesen Um-
inden sich nicht weit von der Wahrheit entfern
nn. Allein wenn die Bogen etwas grösser sind,

olglich, wenn man diesen Werth von $\Sigma . T$ in voriger Gleichung substituirt, und durch T' dividirt

$$m' = m + \tfrac{1}{\Gamma 6} \Delta 66.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$1 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots + \delta^{2m-2} = \frac{1 - \delta^{2m}}{1 - \delta\delta}$$

also auch

$$\Delta = \frac{1 - \delta^{2m}}{1 - \delta\delta} = \frac{66 - (6.\delta^{m-1})^2 \delta\delta}{66 - 66\delta\delta}.$$

Die Gleichung $6.\delta^{m-1} = 6'$ giebt

$$\delta = \left(\frac{6'}{6}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \text{ folglich wird auch}$$

$$\delta\delta = \left(\frac{6'}{6}\right)^{\frac{2}{m-1}}.$$

Sieht man den hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Theil als eine Exponentialgrösse an, und entwickelt denselben nach den bekannten Formeln in eine Reihe, so kommt

$$\delta\delta = 1 + \frac{2}{m-1} \log\frac{6'}{6} + \frac{2}{(m-1)^2} \left(\log\frac{6'}{6}\right)^2 + \ldots;$$

da aber m immer eine sehr grosse Zahl ist, so kann man die höhern Potenzen des Bruchs $\frac{1}{m-1}$ vernachlässigen, und es bleibt

$$\delta\delta = 1 + \frac{2}{m-1} \log\frac{6'}{6}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$66 - 66\delta\delta = -\frac{26^2}{m-1} \log\frac{6'}{6}$$
$$= +\frac{26^2}{m} \cdot \log\frac{6}{6'}.$$

da ferner $\delta\delta$ sehr nahe $= 1$ ist, so kann man

$$(6.\delta^{m-1})^2 \delta\delta = (6.\delta^{m-1})^2 = 6'6'$$

etzen, so dass also endlich

$$\Delta = \frac{66 - 6'6'}{\frac{266}{m} \log\frac{6}{6'}}$$

wird. Setzt man diesen Werth von Δ in die Gleichung

$$m' = m + \tfrac{1}{32}\Delta 66$$

so erhält man

$$m' = m + \frac{m}{32}\cdot\frac{66 - 6'6'}{log\,6 - log\,6'}.$$

Man muss hierbei bemerken, dass die hierbei zu gebrauchenden Logarithmen, natürliche sind. Will man daher die gewöhnlichen anwenden, so muss man den Zähler noch mit dem Modulus der gewöhnlichen Logarithmen $k = 0{,}4342944$ multipliciren, so dass dann

$$m' = m + \frac{k.\,m}{32}\cdot\frac{66 - 6'6'}{log\,6 - log\,6'}$$

wird. Diese Formel lässt sich noch etwas bequemer zur Berechnung machen; denn es ist $66 - 6'6' = (6 + 6')(6 - 6')$, und da man doch die in Minuten angegebenen Werthe von 6, $6'$ in Theile des Bogens verwandeln muss, so kann man wegen der Kleinheit dieses Bogen $6 + 6' = sin(6 + 6')$, $6 - 6' = sin(6 - 6')$ also $66 - 6'6' = sin(6 + 6').\,sin(6 - 6')$, setzen, so dass daher

$$m' = m + \frac{km}{32}\cdot\frac{sin(6 + 6').\,sin(6 - 6')}{log\,6 - log\,6'}.$$

Es ist fast überflüssig zu erwähnen, dass man bei der Berechnung des Nenners $log\,6 - log\,6'$ sich entweder der gewöhnlichen Logarithmen der Sinus bedienen, oder die Winkel 6, $6'$ als blosse Zahlen betrachten kann.

§. 433.

Nehmen wir das Beispiel des vorigen Paragraphs wieder vor, wo $m = 2196$, $6 = 64'$, $6' = 32'$ war, so hat man $log\,6 - log\,6' = 0.3010300$

$log\,k$	= 9.6377843
$log\,m$	= 3.3416323
$log\,sin(6+6')$	= 8.4459409
$log\,sin(6+6')$	= 7.9688698
$log\,\frac{1}{32}$	= 8.4948500
	7.8890773.

$$(\log 6 - \log 6') = \begin{array}{r} 7.8890773 \\ 9.4786098 \\ \hline 8.4104675 = 0{,}02573 \end{array}$$

h erhält man $m' = 2196{,}02573$, etwas weniges er als nach voriger Methode, wo das arithme- Mittel aus den beiden Ausweichungen ange- et wurde.

§. 434.

s ist zu bemerken, dass der Widerstand der keinen Einfluss auf die Dauer der unendlich n Schwingung eines Pendels hat. Da nämlich kleinen Geschwindigkeiten, wie das sich be- nde Pendel hat, die Kraft des Widerstandes, ien die Luft der Bewegung des Pendels entge- tzt, sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit lt, und die Geschwindigkeit des Pendels selbst lem Punkte durch $l\frac{d\varphi}{dt}$ ausgedrückt wird, so man dieselbe durch $\mu l^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2}$ bezeichnen, wo μ für jedes Pendel constanten, von der Dichtig- ler Luft, und der Materie aus welcher das Pen- steht, abhängenden Coefficienten bedeutet. Diese sucht den Winkel φ zu vergrössern, und man aher für die Bewegung des Pendels in der Luft, leichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} = -G \sin\varphi + \mu ll \frac{d\varphi^2}{dt^2}$$

wie gewöhnlich die Schwerkraft bedeutet. Um Gleichung integriren zu können, müssen wir lbe etwas transformiren, welches bequem da- geschieht, dass wir nicht mehr t, sondern φ ie unabhängige veränderliche Grösse (für welche weite Differential Null ist) betrachten. Es ist dann

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} = \frac{1}{dt} \cdot d.\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi . ddt}{dt^3}$$

ch wird vorige Gleichung

$$-\frac{d\varphi . ddt}{dt^3} = -G . \sin\varphi + \mu ll . \frac{d\varphi^2}{dt^2}.$$

Multipliciren wir die ganze Gleichung durch dt^2 und dividiren durch $d\varphi^2$, so lässt sie sich so schreiben

$$-l\frac{ddt}{d\varphi^2} = -G\sin\varphi.\frac{dt^2}{d\varphi^2} + \mu ll\frac{dt}{d\varphi}.$$

Man setze nun

$$\frac{dt}{d\varphi} = \omega^{-1/2}, \text{ so erhält man}$$

$$\frac{ddt}{d\varphi^2} = -\frac{d\omega}{2d\varphi}.\omega^{-3/2},$$

und die Gleichung wird durch Substitution dieser Werthe

$$\frac{ld\omega}{2d\varphi}.\omega^{-3/2} = -G\sin\varphi.\omega^{-3/2} + \mu ll\omega^{-1/2}.$$

Multiplicirt man durch $2d\varphi.\omega^{3/2}$, so kommt

$$d\omega - 2\mu ll\omega d\varphi = -2G.\sin\varphi\, d\varphi$$

und diese lineare Gleichung lässt sich bekanntlich integriren, sobald sie mit dem Factor $e^{-2\mu l\varphi}$ multiplicirt wird; ihr Integral ist

$$l\omega e^{-2\mu l\varphi} = C - 2G\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und C eine Constante bedeutet. Um die hinter dem Gleichheitszeichen angegebene Integration auszuführen, integrire man theilweise, so ist

$$1)\ \int\sin\varphi\, d\varphi.\, e^{-2\mu l\varphi} = -\cos\varphi.\, e^{-2\mu l\varphi} - 2\mu l\int\cos\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi},$$

$$2)\ \int\cos\varphi\, d\varphi.\, e^{-2\mu l\varphi} = +\sin\varphi.\, e^{-2\mu l\varphi} + 2\mu l\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi},$$

Man multiplicire den zweiten Ausdruck durch $2\mu l$, und ziehe ihn dann vom ersten ab, so fällt das Integral $\int\cos\varphi.d\varphi.e^{-2\mu l\varphi}$ ganz heraus, und es bleibt

$$\int\sin\varphi.d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi} = -(\cos\varphi + 2\mu l\sin\varphi)\, e^{-2\mu l\varphi} - 4\mu^2l^2\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi},$$

Hieraus findet sich sogleich

$$\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi} = -\frac{\cos\varphi + 2\mu l\sin\varphi}{1+4\mu^2l^2}.\, e^{-2\mu l\varphi}$$

man diesen Werth in die obere Gleichung
; und zugleich statt ω seinen Werth $\frac{d\varphi^2}{dt^2}$

$$e^{-2\mu l\varphi} = C + 2G.\frac{\cos\varphi + 2\mu l\,\sin\varphi}{1+4\mu^2l^2}.\,e^{-2\mu l\varphi}.$$

lie Constante zu bestimmen, sei bei dem der Bewegung der Werth von $\varphi = \alpha$, so ch die Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 0$; man hat se Gleichung

$$C + 2G\,\frac{\cos\alpha + 2\mu l.\,\sin\alpha}{1+4\mu^2l^2}\,e^{-2\mu l\varphi}$$

wenn man diese von der obern abzieht, und auf beiden Seiten mit $e^{+2\mu l\varphi}$ multiplicirt

$$= 2G.\,\frac{\cos\varphi + 2\mu l\,\sin\varphi}{1+4\mu^2l^2}$$

$$-2G.\,\frac{\cos\alpha + 2\mu l.\,\sin\alpha}{1+4\mu^2l^2}\,e^{-2\mu l(\alpha-\varphi)}.$$

er Kürze wegen setze man noch

$$\frac{G}{l\,(1+4\mu^2l^2)} = \gamma\gamma$$

$$2\mu l = \lambda,\quad \gamma dt = d\theta$$

t sich diese Gleichung auch so schreiben

$$\frac{d\varphi^2}{d\theta^2} = 2.(\cos\varphi + \lambda.\,\sin\varphi)$$

$$-\,2\,(\cos\alpha + \lambda.\,\sin\alpha).\,e^{-\lambda(\alpha-\varphi)};$$

weiter lässt sich diese Gleichung nicht integri-
venn wir nicht die Voraussetzung machen, dass Winkel α und φ so klein sind, dass wir alle en die den Cubus übersteigen, weglassen kön- Entwickelt man dann die verschiedenen tran- nten Grössen in Reihen, und zieht gehörig zu- n, so kommt

$$= (\alpha\alpha - \varphi\varphi)(1+\lambda\lambda)\left[1 + \frac{\lambda'}{3}(\varphi - \frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\varphi})\right]$$

enn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel t und dann $d\theta$ sucht

$$d\theta \sqrt{1+\lambda\lambda} = \frac{-d\varphi}{\sqrt{\alpha\alpha-\varphi\varphi}} \cdot \left[1-\frac{\lambda}{6}\left(\varphi-\frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\varphi}\right)\right].$$

Wir bedienen uns bei der Ausziehung der Quadratwurzel des negativen Vorzeichens, weil, wenn t wächst, auch θ zunimmt (weil $\gamma dt = d\theta$), φ hingegen abnimmt. Wir setzen nun, um vorige Formel zu integriren

$$\varphi = \alpha \cdot \cos u, \quad d\varphi = -\alpha \cdot \sin u \cdot du,$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha\alpha-\varphi\varphi}} = -du,$$

folglich wird durch die Substitution dieser Werthe

$$d\theta \sqrt{1+\lambda\lambda} = du\left[1-\frac{\lambda\alpha}{6}\left(\cos u - \frac{2}{1+\cos u}\right)\right]$$

und hiervon ist das Integral

$$\theta \sqrt{1+\lambda\lambda} = u - \frac{\lambda\alpha}{6}(\sin u - 2\,\mathit{tang}\,\tfrac{1}{2}u).$$

Die hinzuzufügende Constante lassen wir sogleich weg, weil für θ oder $t=0$, $\varphi = \alpha$, also $u=0$ wird. Um nun den Werth von u zu finden, welcher dem Ende der Schwingung entspricht, müssen wir bedenken, dass wenn die Schwingung sich endigt, die Geschwindigkeit des Pendels Null ist, d. h. wir müssen $\frac{d\theta}{dt}$ oder $\frac{d\varphi}{d\theta} = 0$ haben; die Gleichung

$$\frac{d\varphi^2}{d\theta^2} = (\alpha\alpha-\varphi\varphi)(1+\lambda\lambda)\left[1+\frac{\lambda}{3}\left(\varphi-\frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\varphi}\right)\right]$$

giebt uns nun für diejenigen Werthe von φ, bei denen $\frac{d\varphi}{d\theta} = 0$ ist, die Bedingung

$$0 = (\alpha\alpha-\varphi\varphi)\left[1+\frac{\lambda}{3}\left(\varphi-\frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\varphi}\right)\right].$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, indem man $\alpha-\varphi=0$, also $\varphi=\alpha$ setzt, welches bekanntlich für den Anfang der Bewegung der Fall ist. Dividirt man dann durch $\alpha-\varphi$, und setzt den Quotienten wieder Null, so kommt

$$0 = \alpha + \varphi + \frac{\lambda}{3}(\alpha\varphi + \varphi\varphi - 2\alpha\alpha)$$

sieht, dass dieser Gleichung beinahe Genüge werden würde, indem man $\varphi + \alpha = 0$ setzt, wird man $\varphi + \alpha = b\alpha\alpha$ nehmen können, wo onstanter Coefficient ist; setzt man also in Gleichung für φ, $-\alpha + b\alpha\alpha$, so kommt mit lässigung der höhern Potenzen von α

$$0 = b\alpha\alpha - \frac{2\lambda}{3}\alpha\alpha$$

$$= \frac{2\lambda}{3}; \text{ für das Ende der Schwingung hat man}$$

$$\varphi = -\alpha + \frac{2\lambda}{3}.\ \alpha\alpha$$

e Gleichung $\varphi = \alpha.\ cos\, u$ giebt den entsprechen- erth von u,

$$cos\, u = -1 + \frac{2\lambda}{3}\alpha.$$

an findet hieraus $u = \pi - \sqrt{\frac{4\lambda}{3}}\alpha$, wo π die Peripherie eines mit dem Halbmesser $= 1$ be- benen Kreises bedeutet. Substituirt man diesen h von u in die Gleichung

$$\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = u - \frac{\lambda\alpha}{6}\,(sin\, u - 2\, tang\, \tfrac{1}{2}u)$$

ommt

$$\sqrt{1+\lambda\lambda} = \pi - 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}}$$

$$-\frac{\lambda\alpha}{6}\left(sin\, 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} - 2\, cot\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}}\right)$$

da man wegen der Kleinheit des Bogens α,

$$sin\, 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} = 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}},\quad cot\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha\lambda}}$$

hmen kann, so erhält man

$$\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = \pi - \sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} - \left(\frac{\alpha\lambda}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nun war $\theta = \gamma t = \dfrac{t\sqrt{G}}{\sqrt{l}.\sqrt{1+\lambda\lambda}}$, also

um die Grösse $l'\varepsilon$ ausdehnt, wo ε eine
e Zahl ist; das Gewicht der Kugel bringt
erlängerung $\frac{p}{P}.\ l'.\ \varepsilon$ hervor, sobald das
cal hängt; macht dasselbe aber einen
mit der Verticale, so ist die Verlänge-
ndels $\frac{p}{P}.\ l'.\ \varepsilon.\ \cos\varphi$, so dass die Länge
allgemein

$$l' - \frac{p}{P}\, l'.\, \varepsilon.\, (1 - \cos\varphi).$$

man die Geschwindigkeit v, so ist bekannt-
entrifugalkraft der Masse der Kugel und
ate der Geschwindigkeit direct, dem Halb-
Kreises aber umgekehrt proportional, also
das Gewicht, das mit der Centrifugalkraft
irkung hat, durch

$$\frac{p}{G}.\ \frac{vv}{l'}$$

en, da die Masse der Kugel gleich dem Ge-
rselben dividirt durch die Kraft der Schwere
Verlängerung, welche sie am Pendel her-
t wird daher $\frac{p}{G}.\ \frac{vv}{l'}.\ \frac{l'\varepsilon}{P}$, oder wenn man
seinen Werth $\frac{l'^2 d\varphi^2}{dt^2}$ setzt

$$= \frac{p}{P}\, l'\varepsilon.\ \frac{l'}{G}.\ \frac{d\varphi^2}{dt^2}$$

wird die Länge des Pendels allgemein durch

$$= l' - \frac{p}{P} l'\varepsilon \left(1 - \cos\varphi - \frac{l'}{G}.\ \frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)$$

drückt werden. Setzt man hierin aus §. 398.
enäherten Werth

$$\frac{l'}{G}.\ \frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2\cos\varphi - 2\cos\alpha$$

nimmt der Kürze wegen $\frac{p}{P}.\ \varepsilon = \mu$, wo μ so kle-

ıctor $1 - \frac{3}{8}\cos\varphi + \frac{7}{8}\cos\alpha$ wird, wenn man
n Potenzen der Winkel vernachlässigt,
$\frac{7}{8}\alpha\alpha$, so dass also

$$\mu G(\cos\varphi - \cos\alpha)\left[1 + \frac{\mu}{4}(9\varphi\varphi - 7\alpha\alpha)\right]$$

raus erhält man

$$= -\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos - 2\cos\alpha}} + \frac{\mu}{8}\cdot\frac{9\varphi\varphi - 7\alpha\alpha}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\alpha}}\,d\varphi.$$

wie gewöhnlich das negative Vorzeichen
sziehung der Quadratwurzel nimmt, und
Potenzen von μ vernachlässigt. Integrirt
ɔmmt

$$= \pi\left(1 + \tfrac{3}{16}\alpha\alpha\right) + \frac{\mu}{8}\int\frac{9\varphi\varphi - 7\alpha\alpha}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\alpha}}\cdot d\varphi$$

gral des ersten Theils zwischen den Grän-
$-\alpha$ bis $\varphi = -\alpha$ schon bekannt ist. Um
n Theil zu integriren, setze man nähe-

$s\varphi - 2\cos\alpha = \alpha\alpha - \varphi\varphi$
dann $\varphi = \alpha.\cos u$, so wird

$$\frac{-7\alpha\alpha}{-2\cos\alpha}\,d\varphi = -\alpha\alpha\,du\,(9\cos u^2 - 7)$$
$$= -\alpha\alpha\,du\,(\tfrac{9}{2}\cos 2u - \tfrac{5}{2})$$

n ist das Integral $+\alpha\alpha(\frac{9}{4}\sin 2u + \frac{5}{2}u)$;
en Gränzen $u = 0$ und $u = \pi$ genommen,
be $\frac{5}{2}\pi\alpha\alpha$, folglich wird

$$= \pi\left(1 + \tfrac{3}{16}\alpha\alpha + \tfrac{5}{16}\mu\alpha\alpha\right).$$

§. 437.

ht hieraus, dass die aus der Veränderung
entspringende Correction sich zu derjeni-
egen der endlichen Schwingungsbogen a

man die Correctionen, wegen der Re-
ıendlich kleine Bogen, durch die For-

$$\frac{\sin(6+6')\ \sin(6-6')}{\log 6 - \log 6'}$$

ı die in denselben Zwischenzeiten ge-
endlich kleinen Schwingungen
= 2196,0257
2204,0068
2213,5027
2176,0010.

ı zu bestimmen wie viel Schwingungen
el in einem mittlern Sonnentage gemacht
ie, brauchen wir nur zu bemerken, dass
del in derselben Zeit 86650 Schwingungen
431.), und man kann daher die Proportion

$$N : m' = 86650 : y$$

y die gesuchte Anzahl Schwingungen, die
mittlern Sonnentage geschehen, bedeutet.
t in Zahlen:

y = 43305,79
43305,49
43305,49
43305,16
ittel 43305,48.

§. 439.

haben bisher das Pendel immer als ein ma-
hes betrachtet, d. h. als ein solches, welches
ı materiellen Punkte besteht, der an einem
ne Schwere, befestigt ist. Da nun aber alle
ısübung vorkommenden Pendel gleichsam aus
vielen materiellen Punkten bestehen, die in
enen Entfernungen von der Drehungsaxe an-
sind, so müssen wir untersuchen, wie man
ıänge und Gestalt eines solchen Pendels die
ıes mathematischen Pendels finden kann, das
ben Zeit als ersteres seine Schwingungen

Hierzu betrachten wir ein System von
ın Punkten, die auf eine unveränderli

Art mit einer Axe verbunden sind, und die um
Axe, vermöge der Wirkung der Schwere, sich
hen, während die Axe selbst eine horizontale
hat. Die Lage jedes Punktes bestimmen wir d
drei Coordinaten x, y, z, und nehmen an, das
Axe der z mit der Drehungsaxe zusammenfalle,
Axe der x mit der Richtung der Schwere übe
stimme, und y auf beiden senkrecht stehe. Dan
es einleuchtend, dass die dritte Coordinate z
rend der ganzen Bewegung constant bleibt, in
jeder Punkt in einer Ebene schwingt die senkr
auf der Drehungsaxe steht, und wir brauchen d
bei der Untersuchung seiner Bewegung nur die
Coordinaten x und y zu berücksichtigen. Es s
nun die Massen der materiellen Punkte m, m',
m'' . . . ., die ihnen correspondirenden Coordin
x', y'; x'', y''; . . . ., so hat man aus
Verbindung des d'Alembert'schen Princips der Dy
mik mit dem Princip der virtuellen Geschwindig
ben. Folgende Gleichung für die Bewegung dieses
stems, wenn G die Schwere bedeutet:

$$0 = m\left(\frac{ddx}{dt^2} - G\right)\delta x + m'\left(\frac{ddx'}{dt^2} - G\right)\delta x' + m''\left(\frac{ddx''}{dt^2} - G\right)\delta x'' + \ldots . + m.\frac{ddy}{dt^2}\delta y + m'\frac{ddy'}{dt^2}\delta y' + \ldots .$$

§. 440.

Wären nun alle einzelnen Punkte frei, und
nen Bedingungen unterworfen, so würden die
riationen δx, $\delta x'$, $\delta x''$. . . ., δy, $\delta y'$, $\delta y''$. . . .
einander ganz unabhängig seyn, und man mi
um die vorige Gleichung identisch Null zu ma
jeden einzelnen Coefficienten Null setzen. Dies f
aber in unserm Fall nicht statt, denn die Bedin
der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage
materiellen Punkte, giebt uns Bedingungsgleichu

ıen den Coordinaten x, x', x'' . . . . , y, y', . . , aus denen sich die Relationen der Varia- ableiten. Die Unveränderlichkeit der gegen- n Lage der Punkte unter einander und gegen ɛe, lässt sich, wie man leicht sieht, durch zwei iedene Bedingungen ausdrücken; erstens muss bstand jedes Punkts von der Axe constant blei- nennt man daher die Abstände der Punkte m, '. . . . resp. a, a', a'' . . . . , so hat man zuerst eichungen

$$+yy = aa\,;\quad x'x' + y'y' = a'a'$$
$$+y''y'' = a''a''\,;\quad \text{etc. etc. etc.} \qquad \text{(B)}$$

weitens denke man sich durch jeden Punkt und rehungsaxe eine Ebene gelegt, so wie auch den Schwerpunkt des ganzen Systems und die ngsaxe, so bildet jede der erstern Ebenen mit tztern einen Winkel der unveränderlich bleiben Wir setzen die Coordinaten des Schwerpunkts chtlich der früher erwähnten Coordinatenaxen, Y, seinen Abstand von der Drehungsaxe A, man

$$XX + YY = AA.$$

ennt man ferner die Winkel, welche die er- en Ebenen mit der durch den Schwerpunkt ge- Ebene machen 6, $6'$, $6''$ . . . . , so hat man so- ie Gleichungen zur Bestimmung der Tangenten Winkel

$$\frac{yX - xY}{xX + yY} = tang\, 6$$
$$\frac{y'X - x'Y}{x'X + y'Y} = tang\, 6'$$
$$\frac{y''X - x''Y}{x''Y + y''Y} = tang\, 6'' \qquad \text{(C)}$$

etc. etc. etc.

§. 441.

Man sieht hieraus, dass sich alle Coordinaten x, . . durch X, Y, also auch ihre Variationen die Variationen von X, Y ausdrücken lassen, s die Gleichung (A) auf die Form

$$0 = m\left(\frac{x\,ddy - y\,ddx}{dt^2} + Gy\right)$$
$$+ m'\left(\frac{x'ddy' - y'ddx'}{dt^2} + Gy'\right)$$
$$+ m''\left(\frac{x''ddy'' - y''ddx''}{dt^2} + Gy''\right)$$
$$+ \text{etc. etc. etc.} \qquad \text{(E)}$$

an ist aber bekanntlich

$x\,ddy - y\,ddx = d.(x\,dy - y\,dx)$
$x'ddy' - y'ddx' = d.(x'dy' - y'dx')$ etc. etc.

da die Gleichung (D) §. 441. sich auch so schreiässt, wenn man die Charakteristik δ mit d verht

$$x\,dy - y\,dx = (X\,dY - Y\,dX).\frac{aa}{AA},$$

auf ähnliche Weise auch

$$x'dy' - y'dx' = (X\,dY - Y\,dX).\frac{a'a'}{AA}$$
$$x''dy'' - y''dx'' = (X\,dY - Y\,dX).\frac{a''a''}{AA}$$

muss, so erhält man ebenfalls

$$x\,ddy - y\,ddx = \frac{aa}{AA}.\,d.(X\,dY - Y\,dX),$$
$$x'ddy' - y'ddx' = \frac{a'a'}{AA}.\,d.(X\,dY - Y\,dX),$$
$$x''ddy'' - y''ddx'' = \frac{a''a''}{AA}.\,d.(X\,dY - Y\,dX);$$

etc. etc. etc.

ch wird hierdurch die Gleichung (E) die Gestalt

$$\frac{X\,dY - Y\,dX)}{AA.\,dt^2}.(maa + m'a'a' + m''a''a'' + \ldots.)$$
$$+ G(my + m'y' + m''y'' + \ldots.) = 0$$

ten. Man setze der Kürze wegen

$$maa + m'a'a' + m''a''a'' + \ldots\ldots = \Sigma maa$$
$$m + m' + m'' + \ldots\ldots\ldots = M$$

t aus den Eigenschaften des Schwerpunktes bet, dass

$$my + m'y' + m''y'' + \ldots. = M.\,Y$$

$+ Gy\ )$

$+ Gy'\ )$

$+ Gy''\ )$ (E)

...ch
$d.(x\,dy - y\,dx)$
$d.(x'dy' - y'dx')$ etc. etc.
(D) §. 441. sich auch so schrei-
die Charakteristik δ mit d ver-

$(XdY - YdX).\ \frac{aa}{AA}$,

Weise auch

$= (XdY - YdX).\ \frac{a'a'}{AA}$

$lx'' = (XdY - YdX).\ \frac{a''a''}{AA}$

erhält man ebenfalls

$-y\,ddx = \frac{aa}{AA}.\ d.(XdY - YdX)$,

$-y'ddx' = \frac{a'a'}{AA}.\ d.(XdY - YdX)$,

$-y''ddx'' = \frac{a''a''}{AA}.\ d.(XdY - YdX)$;

. etc. etc.
ird hierdurch die Gleichung (E) die Gestalt

$\frac{}{}.\ (maa + m'a'a' + m''a''a'' + \ldots.)$
$— YdX)$
$1.\ dt^2$
$(my + m'y' + m''y'' + \ldots.) = 0$

Man setze der Kürze wegen
$+ m'a'a' + m''a''a'' + \ldots\ldots = \Sigma maa$
$- m' + m'' + \ldots\ldots\ldots = M$
us den Eigenschaften des Schwerpunktes be-
dass
$+ m'y' + m''y'' + \ldots. = M.\ Y$

$$= -\frac{x}{X} \cdot \partial$$

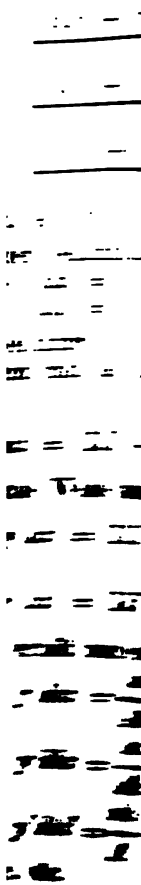
$$= -\frac{y}{X} \cdot \partial$$

[illegible] Weise e[illegible]

[illegible] B) und ([illegible]

$$= +\frac{x}{X} \partial Y$$

$$\partial y = -\frac{x}{}$$



durch den
durch H
on irgend
ene, die
n wollen,
ht die mit
allel läuft,
senkrecht

g mit dem
, so kommt,
st
dm.

$dm = 2FH$.
elbe nichts an-
in den Abstand
auf der Linie
d verschwinden,
. Nun bedeutet
rägheit rücksicht-
enden Axe, $\int HM^2$.
für eine durch den
te, und FM den Ab-
daher obige Gleichung
: Das Moment der Träg-
tlich einer beliebigen Axe,
der Trägheit rücksichtlich
rpunkt mit ersterer parallel
Product aus der Masse des Kör-
des Abstands beider Axen.

§. 445.

en zuerst das Moment der Trägheit für
rücksichtlich einer durch den Schwer-
da wir die Kugel als homogen betrachten,
durch ihren Mittelpunkt gehenden Axe auf-
Diese Axe sey die Axe der z; dann wird,
oft erwähnt ist, das Element der Masse
$m = \rho . rrdr\, d\varphi .\, d\psi\, cos\, \psi$
ichtigkeit bedeutet; der Abstand dieses

Elements von der Axe wird $r \cos\psi$, also das Moment der Trägheit

$$= \rho . r^4 dr\, d\varphi . \cos\psi^3 . \cos\psi\, d\psi.$$

Integrirt man zuerst von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, dann von $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\psi = +\frac{1}{2}\pi$, und zuletzt von $r = 0$ bis $r = R$, wo R den Halbmesser der Kugel bedeutet, so findet man ihr Moment der Trägheit

$$= 4\rho \int R^4 \pi = \tfrac{8}{5} R^5 \pi \rho . \tfrac{2}{3} RR$$

und da die Masse derselben durch $m = \frac{4}{3}\rho R^3\pi$ ausgedrückt wird, so ergiebt sich dasselbe auch

$$= \tfrac{2}{5} m . RR.$$

§. 486.

Zweitens wollen wir das Moment der Trägheit für einen homogenen geraden Cylinder rücksichtlich einer Axe suchen, die senkrecht auf der geometrischen Axe steht, und durch seinen Schwerpunkt oder die Mitte der letzteren Axe geht. Hierzu theilen wir den Cylinder durch Ebenen die mit seiner Basis parallel gehen, in lauter unendlich dünne Cylinder, deren Dicke dz ist, denken uns dann aus dem Mittelpunkte eines solchen Cylinders unendlich viel concentrische Kreise gezogen, deren gegenseitiger Abstand durch dr ausgedrückt ist, und ziehen endlich aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte unendlich viel Radien, wo jeder mit dem nächst folgenden den

länge des Cylinders angiebt, so erhält man sein Trägheitsmoment rücksichtlich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Axe

$$\rho\pi RRa\left(\frac{aa}{12}+\frac{RR}{4}\right).$$

Der vor der Parenthese stehende Factor ist bekanntlich die Masse des Cylinders, folglich lässt sich sein Trägheitsmoment auch so schreiben:

$$m'\left(\frac{aa}{12}+\frac{RR}{4}\right)$$

wenn m' die Masse des Cylinders bedeutet.

§. 447.

Wir wollen nun annehmen, ein Pendel sey aus einem cylindrischen Faden AB, und einer daran befestigten Kugel C (fig. 8.) zusammengesetzt, und es schwinge um eine Axe DE, die senkrecht auf AB durch A geht. Es sey nun

die Masse der Kugel $= m$
Halbmesser der Kugel $= r$
die Masse des Fadens $= m'$
Länge des Fadens $= a$
halbe Dicke des Fadens $= R$

ist das Moment der Trägheit der Kugel gegen die Axe DE, da ihr Schwerpunkt im Mittelpunkte C liegt (§. 444. 445.)

$$= (a+r)^2\ m+\tfrac{2}{5}m.\ rr$$

und das Moment der Trägheit des cylindrischen Fadens gegen dieselbe Axe, da sein Schwerpunkt in der Mitte F zwischen A und B sich befindet (§. 444. 446.)

$$= m'\left(\frac{aa}{3}+\frac{RR}{4}\right)$$

folglich das Trägheitsmoment des ganzen Pendels, oder die Summe Σmaa (§. 443.)

$$= m\,(aa+2ar+\tfrac{7}{5}rr)+m'\left(\frac{aa}{3}+\frac{RR}{4}\right).$$

Der Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsaxe, multiplicirt in die Masse des ganzen Pendels, oder das Product $M.A$ (§. 443.) wird

$$m\,(a+r)+m'.\frac{a}{2}$$

dass die Länge des mathematischen Pendels, das mit dem zusammengesetzten in gleichen Zeiten schwingt,

$$l = \frac{m\,aa - 2mar + mrr + m\left(\frac{aa}{3} + \frac{RR}{4}\right)}{m(a - r) + m'\frac{a}{2}}$$

weil dieselbe nach §. 443. durch $\frac{\Sigma maa}{MA}$ ausgedrückt wird. Es ist einleuchtend, dass, da die Massen der Körper den Gewichten derselben proportional sind, statt hierin vorkommenden Massen m, m' auch ihre Gewichte p, p' gesetzt werden können. Vorigen Ausdruck kann man auch so schreiben:

$$l = a + r + \frac{\frac{2}{3}prr - p'\left(\frac{aa}{6} + \frac{ar}{2} - \frac{RR}{4}\right)}{p(a + r) + p'\cdot\frac{a}{2}}$$

indem man statt der Massen die Gewichte nimmt.

§. 448.

Borda fand die Entfernung von A bis G, wo G der unterste Punkt der Kugel ist 203952,17 Theile seines Maassstabes, $r = 937$, $p = 9911$ Gran, $p' = 13{,}7$

ührt, dass die Luft einen Theil des Gewichts desselen trägt, wodurch die Schwere verringert wird, nd daher die Schwingungen des Pendels langsamer nd, als es im leeren Raume der Fall ist. Gesetzt an, die beobachtete Länge sey l, die relative Schwerraft G, die Länge eines Pendels, das seine Schwingungen im leeren Raume in derselben Zeit vollendet , und die daselbst wirkende Schwerkraft G', so hat an (§. 399.) die Zeit einer Schwingung

$$T = \sqrt{\frac{l}{G}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin.\frac{1}{2}\alpha^2 . \sin u^2}},$$

nd eben so für das andere Pendel im leeren Raume, elcher dieselben Ausweichungen α, und dieselbe chwingungszeit T hat,

$$T = \sqrt{\frac{l'}{G'}} \cdot \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2 . \sin u^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich $\frac{l}{G} = \frac{l'}{G'}$ oder $l' = l . \frac{G'}{G}$.

Nun seyen die Gewichte der Kugel und des Fadens n der Luft p, p', im leeren Raume P, P', so ist

$$G : G' = p + p' : P + P'$$

nd sind die reciproken specifischen Gewichte der Materien, aus welchen die Kugel und der Faden beehen ρ, ρ', das Verhältniss des Gewichts der Luft u dem des Wassers $= \omega$, so hat man bekanntlich

$$P = \frac{p}{1 - \omega\rho} = p(1 + \omega\rho)$$

$$P' = \frac{p'}{1 - \omega\rho'} = p'(1 + \omega\rho')$$

ndem die Grössen $\omega\rho$, $\omega\rho'$ so klein sind, dass man hre höhern Potenzen weglassen kann. Dann erhält man

$$\frac{G'}{G} = \frac{P + P'}{p + p'} = 1 + \omega . \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'}.$$

Die Kugel bestand aus Platina, der Faden aus Eisen, man hat daher

$$\rho = \frac{1}{20{,}7}, \quad \rho' = \frac{1}{7{,}6}, \quad \omega = \frac{1}{820}$$

$$p = 9911 \text{ Gran}, \quad p' = 13{,}79 \text{ Gran}$$

und hieraus ergiebt sich die Grösse

$$\omega \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'} = \frac{1}{16885}.$$

Da nun ferner $l' = l. \frac{G'}{G}$, also auch

$$l' = l + l\omega. \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'},$$

so erhält man die Correction von l, welche Grösse $= 202965{,}82$ ist (§. 448.)

$$l\omega. \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'} = 12{,}02$$

folglich $l' = 202977{,}84$.

§. 450.

Ein Pendel, dessen Länge 202977,84 Theile des bei der Messung gebrauchten Maassstabes enthält, macht, nach §. 438., in einem mittlern Sonnentage 43305,48 Schwingungen, und da bekanntlich die Pendellängen sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten, und die Schwingungszeiten selbst umgekehrt wie die Anzahl der Schwingungen in einer bestimmten Zeit sich verhalten, so wird man leicht die Länge L des Secundenpendels, welches in einem Tage 86400 Schwingungen macht, durch die Proportion

$$l' : L = 86400^2 : 43305{,}48^2$$

erhalten. Hierdurch findet sich

$$L = 50992{,}57$$

wodurch die Länge des Pendels bestimmt ist.

Wären die Beobachtungen in einer gewissen Höhe über der Meeresoberfläche gemacht, so könnte man die gefundene Pendellänge leicht auf diejenige reduciren, welche an der Meeresoberfläche selbst statt finden würde. Denn bezeichnet man die Schwere, welche in der Höhe des Beobachtungsortes wirken muss, durch Γ, die an der Meeresoberfläche durch G, und das Verhältniss der Höhe des Beobachtungsortes über der Meeresoberfläche zum Erdhalbmesser durch λ, so hat man nach §. 390.

$$\Gamma = G - 2\lambda G;$$

bedeutet ferner L' die Länge des Pendels an der

Meeresoberfläche, und L die in der Höhe beobachtete, so wird

$$L' : L = G : \Gamma$$

und hieraus kommt, wenn man statt Γ seinen Werth setzt:

$$L' = \frac{L}{1-2\lambda} = L\,(1+2\lambda).$$

Nimmt man z. B. die Höhe des Beobachtungsortes über dem Meere zu 30 Toisen an, und bedenkt, dass der Halbmesser der Erde ungefähr = 3272000 Toisen beträgt, so hat man

$$\lambda = \frac{30}{3272000} = \frac{1}{109067}$$

folglich beträgt die zur beobachteten Pendellänge hinzuzufügende Correction nur + 0,47 Theile.

§. 451.

In so fern der Beobachtungsort sich nicht auf einer sehr über das allgemeine Niveau hervortretenden Stelle, z. B. dem Gipfel eines hohen Berges befindet, sondern man ganz unmerklich erst nach und nach vom Meere aus bis zur Höhe des Beobachtungsortes gelangt, lässt sich diese Correction für die Reduction der Länge des Pendels ohne weiteres anwenden; allein wenn man sich auf einem so isolirten Punkt, wie der Gipfel eines Berges ist, befindet, und daselbst die Länge des Pendels beobachtet, so würde man auf diese Art die Pendellänge zu gross finden, indem die Schwere, welche auf der Spitze des Berges, eigentlich nach dem §. 390. entwickelten und vorhin angewandten Gesetz, statt finden sollte, durch die Anziehung des Berges selbst vermehrt wird, folglich die Länge des Pendels, welches seine Schwingungen in einer bestimmten Zeit vollendet, grösser seyn muss, als wenn diese neue Anziehung nicht mit hinzugetreten wäre. Man könnte dann den Berg als ein Kugelsegment oder auch als einen Schnitt eines Paraboloïds annehmen, dessen Scheitel auf der Spitze des Berges liegt, und dessen Axe mit der Richtung der Schwere übereinstimmt. Wir wollen als ein zugehöriges Beispiel die letztere Annahme machen, und

sehen, wie gross dann die Anziehung des Berges sich ergiebt. Es sey daher (fig. 9.) ABC der Berg, seine Basis AC, BD die Höhe; durch B legen wir eine horizontale Linie EF parallel mit der Basis AC, und fällen von einem Punkte M des Berges das Perpendikel PM auf EF, so ist aus der Theorie der Parabel bekannt, dass allgemein

$$PB^2 = PM.\ Const.$$

wo die Constante den Parameter der Parabel bedeutet; dieser lässt sich leicht finden, sobald man die Höhe des Berges BD und den Halbmesser seiner Basis AD kennt; denn es muss ebenfalls die Gleichung

$$AD^2 = BD.\ Const.$$

statt finden, woraus sich $Const. = \frac{AD^2}{BD}$ ergiebt. Substituirt man diesen Werth der Constante in obige Gleichung, so kommt

$$PB^2 = \frac{AD^2}{BD}.\ PM$$

für die Gleichung der Oberfläche des Berges. Man setze nun $PB = r$, $MP = z$, $BD = h$, $AD = nh$, wo daher n anzeigt, wie oft die Höhe des Berges in dem Halbmesser seiner Basis enthalten ist, und wegen der geringen Neigung der Berge im Allgemeinen eine ziemlich bedeutende Zahl ausmacht, so hat man durch die Substitution dieser Werthe, zwischen z und r die Relation

$$rr = hnn.\ z$$

Theilt man den Berg in lauter unendlich dünne Scheiben, indem man denselben durch Ebenen schneidet, die der Basis parallel gehen, diese Scheiben wieder in ihre Elemente, nach der Methode die wir schon §. 446. bei dem geraden Cylinder angewendet haben, und nennt das Element der Masse dm, die Dichtigkeit des Berges, welche wir als gleichförmig ansehen, ϱ, so kommt

$$dm = \varrho.\ rdr.\ d\phi.\ dz.$$

Bezeichnen wir den Abstand dieses Elements von dem in B befindlichen, angezogenen Punkte durch R, und bedenken, dass die Anziehung der Masse direct und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt propor-

nal ist, so erhalten wir die Anziehung des Elements dm auf den Punkt B

$$\frac{fdm}{RR} = f\rho.\frac{rdr.\,d\varphi.\,dz}{RR}$$

) f ein Coefficient ist, der für alle Materie einerlei erth behält. Diese Totalanziehung müssen wir nun ch drei auf einander senkrechten Axen zerlegen, su wir die Linien BD, BE und eine dritte auf en beiden, also auf der Ebene des Papiers, senkht stehende wählen, und wir finden die einzelnen tenanziehungen dadurch, dass wir die Totalanzieung $\frac{fdm}{RR}$ mit den Cosinus der Winkel multipliciren, e der Radius R mit den Axen macht. Man berkt aber leicht, dass wegen der symmetrischen stalt des Bogens gegen die Axe BD, die Summen ler einzelnen Anziehungen nach den beiden andern xen Null werden, so dass wir blos die Anziehung s Berges nach der ersten Axe BD zu berücksichgen haben. Nun ist der Cosinus des Winkels, den r Radius R mit dieser Axe bildet $= \frac{z}{R}$, folglich ird die Anziehung des Elements dm nach dieser e $= \frac{fdm}{RR}.\frac{z}{R}$, oder

$$f\rho.\frac{rdr.\,zdz.\,d\varphi}{R^3}$$

Setzt man statt R seinen Werth durch r und z sgedrückt

$$R = \sqrt{rr + zz}$$

wird obiger Ausdruck

$$f\rho.\frac{rdr.\,zdz.\,d\varphi}{(rr+zz)^{\frac{3}{2}}}$$

elches dreimal integrirt werden muss, um die ganze nziehung des Berges zu geben. Führt man die Integration zuerst nach φ aus, und bedenkt, dass das tegral zwischen den Gränzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen werden muss, so kommt

Für $r = 0$ muss dieses Integral verschwinden; es ist daher auch $C = 0$, und aus der Gleichung $rr = 2nnz$ sieht man, dass, da der grösste Werth von $z = h$ ist, dasselbe bis zu $r = hn$ ausgedehnt werden muss. Hierdurch findet man die Anziehung

$$A = 2\pi f\varrho\, hn. \left\{1 - \frac{n}{2} log \frac{\sqrt{nn+1}+1}{\sqrt{nn+1}-1}\right\}.$$

Da die Zahl n gegen die Einheit ziemlich bedeutend ist, so kann man den logarithmischen Theil voriger Formel in eine Reihe verwandeln, die nach den Potenzen von $\frac{1}{n}$ fortschreitet. Man erhält dadurch nach den gehörigen Reductionen

$$\frac{n}{2}. log \frac{\sqrt{nn+1}+1}{\sqrt{nn+1}-1} = 1 - \tfrac{1}{3}. \frac{1}{nn}$$

und wenn man diesen Werth in vorige Gleichung setzt, so kommt

$$A = \tfrac{4}{3}\pi f\varrho \frac{h}{n}.$$

Nun sey die mittlere Dichtigkeit der Erde ϱ', ihr Halbmesser $= a$, so ist die Anziehung derselben, wenn wir sie als eine Kugel betrachten

$$G = \tfrac{4}{3}\pi f\varrho'. a$$

wo G die Schwere ist, und durch die Verbindung dieser Gleichung mit der vorigen ergiebt sich

$$A = \tfrac{1}{4} G. \frac{\varrho}{\varrho'}. \frac{h}{2n}.$$

Setzen wir die mittlere Dichtigkeit der Erde $\varrho' = 4{,}7$, so ist

$$A = G. \frac{\varrho}{18{,}8}. \frac{h}{an}.$$

Die Grösse $\frac{h}{a}$ ist dann das, was wir §. 420. durch λ bezeichnet haben, und wir erhalten daher die Schwere auf der Oberfläche des Berges $= G - 2\lambda G + A$

$$= G - 2\lambda G \left(1 - \frac{\varrho}{37{,}6}. \frac{1}{n}\right).$$

Ist dann die auf der Spitze des Berges beob
tete Länge des Pendels $= L$, so wird die auf
Meeresoberfläche reducirte

$$= L + 2\lambda L\left(1 - \frac{\rho}{37{,}6}\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot$$
$$\left(1 - \frac{\rho'}{37}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

§. 452.

Wenn man irgend ein physisches Pendel von
liebiger Gestalt um eine Axe schwingen lässt,
den Werth von $l = \frac{\Sigma maa}{MA}$ für diese Axe nach §.
sucht, hierauf eine neue Drehungsaxe die mit
vorigen parallel ist, an dem Pendel so anbringt,
ihr Abstand von der erstern der Länge l g
kommt, und zugleich eine durch beide Axen geh
Ebene durch den Schwerpunkt des Pendels geht
wird das Pendel um diese zweite Axe seine Sch
gungen in eben derselben Zeit vollenden als um
stere. Dies lässt sich leicht folgendermassen be
sen. Es sey das Moment der Trägheit rücksich
einer Axe, die durch den Schwerpunkt des Pe
geht, und zugleich der angenommenen Drehung
parallel ist, P, der Abstand der Drehungsaxe
Schwerpunkt $= a$, die Masse des Pendels $= M$
hat man nach §. 443 und 444. die Länge des gl
geltenden mathematischen Pendels

$$l = \frac{P + Maa}{Ma}$$

und hieraus das Trägheitsmoment gegen eine d
den Schwerpunkt gehende Axe

$$P = Ma\,(l - a).$$

Nun sey der Abstand einer neuen Axe
Schwerpunkt $= b$, so wird die Länge des mathe
tischen Pendels, das mit diesem gleiche Schwingu
zeiten hält, auf ähnliche Art durch $\frac{P + Mbb}{Mb}$,
wenn man statt P seinen Werth $Ma\,(l - a)$ s
und dann Zähler und Nenner durch M dividirt, d
$\frac{a\,(l - a) + bb}{b}$ ausgedrückt. Soll nun diese L

frühern gleich werden, so muss diese Grösse $= l$
a, d. h. man hat die Gleichung

$$a(l-a) + bb = lb$$

l diese giebt für b die Werthe $b = a$, $b = l - a$.
e erste Werth giebt uns die erste Drehungsaxe
der; der zweite hingegen zeigt, dass die Summe
Abstände der beiden Drehungsaxen vom Schwer-
kt, also der Abstand beider Axen von einander
st der Grösse l gleich seyn muss, wenn die Schwin-
gen des Pendels um beide Axen in gleichen Zeiten
hehen sollen.

Hat man also an einem Pendel in der beschrie-
en Lage zwei Drehungsaxen angebracht, die so
haffen sind, dass die Schwingungen um die eine
r die andere in gleicher Zeit geschehen, oder was
selbe ist, in beiden Lagen das Pendel dieselbe An-
l von Schwingungen in einer bestimmten Zeit voll-
et, so kann man daraus schliessen, dass der Ab-
d der beiden Drehungsaxen von einander, die
ge des mathematischen Pendels giebt, welches seine
wingungen in derselben Zeit vollendet. Diese Ein-
tung des Pendels wurde zuerst von Kater ange-
det, und er nennt dasselbe das unveränderliche
del. Es ist dasselbe für Beobachtungen, die man
Reisen anstellen will, sehr zweckmässig, da, wenn
die Anzahl der Schwingungen an dem Beobach-
gsorte angemerkt hat, keine andere Correction
hig ist, als die, welche von der Temperatur des
es und der daher rührenden verschiedenen Aus-
nung der Materie des Pendels abhängt. Der gröss-
Vortheil den dasselbe gewährt, besteht darin, dass
die §. 447 und 448. angewandten Correctionen,
das physische Pendel auf das mathematische zu
uciren, gar nicht nöthig hat, und grade diese sind
ner innerhalb gewisser Gränzen einer Ungewissheit
erworfen, die aus der nicht vollständigen Homo-
ität der Materie entsteht, da wir dieselbe in un-
n Rechnungen doch voraussetzen müssen, indem
die innere Beschaffenheit der Platinakugel, die
n Hauptbestandtheil der vorigen Art von Pendeln
machte, völlig unbekannt bleiben muss. Nun kann
n freilich den hierdurch entstehenden etwanigen
ler dadurch zum Theil aufheben, dass man di

auf verschiedene Weise einrichten; die
würde folgende seyn. Man nehme ein Par
dum von irgend einer Materie $ABCD$ (fig.
von Holz, und bringe in der Mitte der Gr
der Parallelepipedum zwei Metallspitzen EF
die dazu dienen, um die Coincidenzen mit
pendel besser beobachten zu können. In
sich eine Drehungsaxe, welche senkrecht
Fläche $ABCD$ steht, und in L die andere
$EL = GK$ ist. Wäre nun das Pendel völ
gen, das Parallelepipedum ganz regelmässig
nau $HG = EF$, so müssten die Schwing
die Axe K in derselben Zeit als um die A
schehen. Da dieses nun aber wohl nie st
wird, und die Drehungsaxen ihrer Lage n
verändert werden können, so bringe man
noch ein kleines verschiebbares Gewicht a
Lage man so lange ändert, bis die Beob
zeigen, dass die Schwingungen in gleichen
schehen.

Um dieses durch ein Beispiel deutlich
chen, wollen wir der Kürze wegen anneh
Pendel bestehe blos aus einen so dünnen P
pedum, dass man dasselbe als ein Parall
betrachten kann (fig. 11.), dessen Breite AI
und die Länge AC durch l bezeichnet w
Rücksichtlich des Gesetzes der Dichtigkeit w
die Voraussetzung machen, die Dichtigke
jeden unendlich schmalen Streifen $EFGH$
AB parallel geht, constant, und nur weni

eine Function des Abstandes AE des Streifens von AB seyn wird. Halbiren wir AB und CD in L und M, und ziehen LM, so wird auf dieser Linie der Schwerpunkt liegen müssen, wie ohne weitere Rechnung von selbst klar ist. Es sey $KN = x$, $LN = y$, so ist das Element der Masse

$$dM = (\rho + \delta\rho)\, dxdy \cdot$$

wo unserer Voraussetzung zufolge ρ constant und $\delta\rho$ eine Function von y allein seyn wird. Integrirt man diesen Ausdruck von $x = -\frac{1}{2}b$ bis $x = +\frac{1}{2}b$, und dann von $y = 0$ bis $y = l$, so erhält man

$$M = \rho bl + b\int \delta\rho.\, dy$$

Bezeichnet man den Abstand LQ des Schwerpunkts Q von der Seite AB durch y', so hat man zur Bestimmung von y' die Gleichung

$$My' = \int y.\, dM = \int ydy\, (\rho + \delta\rho)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\rho bl^2 + b\int \delta\rho.\, ydy.$$

Das Moment der Trägheit des Elements K gegen eine Drehungsaxe, die durch den Punkt L geht, und senkrecht auf der Fläche $ABCD$ steht, wird durch $KL^2.\, dM$ ausgedrückt, und da $KL^2 = KN^2 + LN^2 = xx + yy$, so hat man das Moment der Trägheit für das ganze Parallelogramm, indem man statt dM seinen Werth $(\rho + \delta\rho)\, dxdy$ setzt

$$= \int(\rho + \delta\rho)\, (xx + yy).\, dxdy.$$

Wird das Integral von $x = -\frac{1}{2}b$ bis $x = +\frac{1}{2}b$, und von $y = 0$ bis $y = l$ ausgedehnt, so kommt das Moment der Trägheit gegen die Axe L

$$T = \tfrac{1}{3}\rho lb\,(ll + \tfrac{1}{4}bb) + b\int \delta\rho.\, (yy + \tfrac{1}{12}bb).\, dy$$

Bezeichnet man das Moment der Trägheit gegen eine durch den Schwerpunkt Q gehende Axe, die mit der durch L gelegten parallel ist, durch T^0, so hat man nach §. 444.

$$T = T^0 + My'y'.$$

Geht nun die eigentliche Drehungsaxe des Pendels durch den Punkt R, und nennt man den Abstand LR, r, das Trägheitsmoment rücksichtlich der Axe R, T', so wird

$$T' = T^0 + (y' - r)^2\, M$$

oder wenn man statt T^0 seinen Werth $T - My'y'$ setzt

$$T' = T - 2ry'M + r^2 M.$$

Nun werde in V die kleine verschiebb
angebracht, so kommt, indem wir die ver
Länge VR durch p bezeichnen, das Mo
Trägheit des so zusammengesetzten Pendels
Axe R, indem wir der Kürze wegen die
einen materiellen Punkt betrachten

$$R = T' + mpp$$

und das Moment der Trägheit gegen die A

$$S = T'' + m(l - 2r - p)^2.$$

Bezeichnet man die Längen der mathe
Pendel, die diesen beiden Schwingungsaxen
entsprechen, resp. durch L, L', so kommt n

$$L = \frac{R}{M(y' - r) + mp},$$

$$L' = \frac{S}{M(l - y' - r) + m(l - 2r - p)}$$

Nun setze man der Kürze wegen die v
tegrale von $y = 0$ bis $y = l$ genommen

$$\int \delta\rho.\ dy = \alpha\rho l$$
$$\int \delta\rho.\ y dy = 6\rho l^2$$
$$\int \delta\rho.\ y^2 dy = \gamma\rho l^3$$

so erhält man aus den vorigen Ausdrücke
My', T, diese:

$$M = \rho l b (1 + \alpha)$$
$$My' = \tfrac{1}{2}\rho l^2 b (1 + 2\delta)$$
$$T = \tfrac{1}{3}\rho l^3 b (1 + 3\gamma)$$

indem wir der Einfachheit wegen annehm
Breite b des Parallelogramms sey gegen d

$$My' = \tfrac{1}{2} Mt\,(1+\lambda)$$
$$T = \tfrac{1}{2} Mll\,(1+\lambda')$$

λ und λ' sehr kleine Grössen sind, da wir angemen haben, dass α, β, γ solche seyn sollen. Nehwir noch der kürzern Rechnung wegen an, dass Drehungsaxen durch die Punkte L und M gehen n, so wird $r = 0$,

$$T' = T = \tfrac{1}{2} Mll\,(1+\lambda')$$
$$T'' = \tfrac{1}{2} Mll\,(1+\lambda) - Mll\lambda$$

hieraus ferner

$$L = \frac{\tfrac{1}{2} ll\,(1+\lambda') + \mu\mu p}{\tfrac{1}{2} l\,(1+\lambda) + \mu p}$$

$$L' = \frac{\tfrac{1}{2} ll\,(1+\lambda') - ll\lambda + \mu\,(l-p)^2}{\tfrac{1}{2} l\,(1-\lambda) + \mu\,(l-p)}.$$

$\frac{m}{M} = \mu$ gesetzt ist. Soll nun die Masse m so ebracht werden, dass die Schwingungen um beide n in gleichen Zeiten geschehen, so muss $L = L'$ n. Nimmt man statt L und L' ihre Werthe und cirt gehörig, indem man die Producte der Grös- λ, λ', μ vernachlässigt, so kommt

$$\mu\,(l-2p) = l\lambda$$

welcher Gleichung sich p bestimmen lässt, und n sieht daher, dass es möglich sey, die Masse m einen solchen Ort zu bringen, dass die Schwingen um beide Axen in gleichen Zeiten geschehen.

Man kann übrigens aus dieser Gleichung leicht gen, dass die Masse m so angebracht werden muss, s ihr statisches Moment rücksichtlich der Mitte Pendels, dem statischen Moment des ganzen Pens rücksichtlich der Mitte desselben gleich seyn ss. Denn es sey der Abstand der Masse von der tte $= a$, der Abstand des Schwerpunkts $= a'$, so man $a = \frac{1}{2} l - p$, $a' = y' - \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} l\lambda$, weil $' = \frac{1}{2} Ml\,(1+\lambda)$ ist, und vorige Gleichung

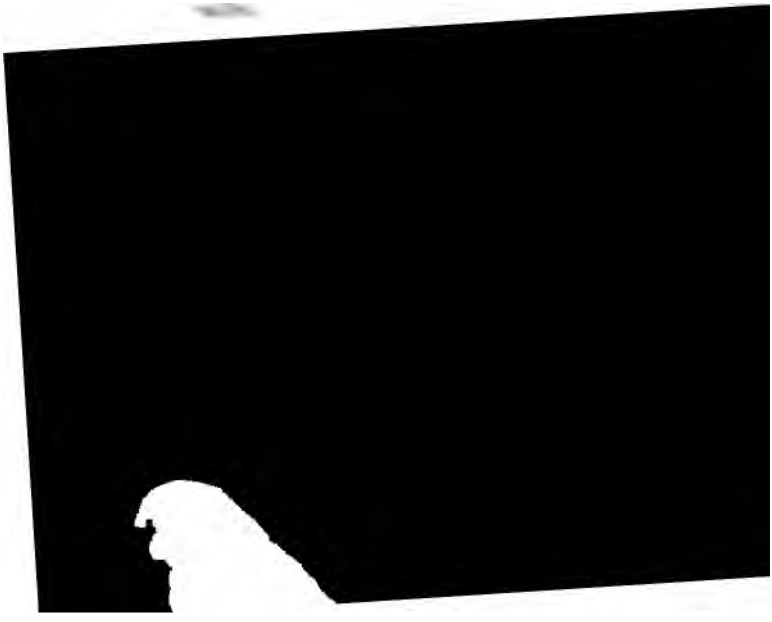
$$\mu\,(l-2p) = l\lambda$$

d daher auch $\mu a = a'$. Es ist aber $\mu = \frac{m}{M}$, folgt $ma = Ma'$, wodurch der Satz erwiesen ist.

Von der Bestimmung der geographis... Lage der Oerter auf der Erd...

§. 454.

Es ist schon früher §. 50. erwähnt worden, ... die Lage der Oerter auf der Erde durch die ... ... in Länge und Breite derselben bestimmt ... ... ohne weiter die Methoden anzugeben, ... diese Bestimmungsstücke gefunden werden. ... wollen wir nun zeigen, wie ... Beobachtungen diese beiden Grö... ... die Coordinaten des Ortes ... ... können, sich ausmitteln lassen. Um ... um die Lage des Ortes vollständ... ... noch eine dritte Coordinate, nämli... ... des Ortes über der Meeresoberfläche. ... da diese durch Beobachtungen ... ... durch die Beobachtung ... ...finden wird, so berücksichtig... ... nicht mit, sondern werden diese ... ...der setzen, wenn im physisch... ... der Erde die Rede ...



immer gleichen Abstand vom Pol, oder änderte ihre Declination nicht, so würde das Mittel hen den beiden beobachteten Zeiten die Zeit Uhr angeben, zu welcher der wahre Mittag statt t, oder der wahre Tag seinen Anfang nimmt, n bei einem unveränderlichen Abstande eines melskörpers vom Pol gleiche Stundenwinkel auch hen Höhen über dem Horizont entsprechen. Die ination der Sonne ist aber veränderlich, und das metische Mittel zwischen den beiden Beobachtzeiten würde den wahren Mittag entweder zu oder zu spät angeben, jenachdem die Sonne sich Nordpol entfernt oder sich ihm nähert. Man daher am berechneten Mittel noch eine kleine rection anbringen, die sich auf folgende Art leicht en lässt.

§. 456.

Es sey (fig. 1.) in S die Sonne, HZR der Meian, HMR der Horizont, P der Pol, Z das Zea, die Höhe der Sonne $= h$, ihre Declination $= D$, Polhöhe $= p$, der Stundenwinkel $= t$, so hat n im Dreieck ZSP, $ZS = 90° - h$, $ZP = 90° - p$, $= 90° - D$, $ZPS = t$, und da bekanntlich

$$\cos ZS = \cos ZP . \cos SP + \sin ZP . \sin SP . \cos ZPS$$

erhält man durch Substitution der angegebenen erthe

$$\sin h = \sin p . \sin D + \cos p . \cos D . \cos t.$$

Des Nachmittags sey für dieselbe Höhe h, der ndenwinkel $t + \delta t$, die Declination $D + \delta D$, so man ebenfalls, indem man statt t, $t + \delta t$, statt $D + \delta D$ in vorige Formel setzt

$$\sin h = \sin p . \sin(D + \delta D) + \cos p . \cos(D + \delta D) . \cos(t + \delta t).$$

Die Grössen δD, δt sind nun so klein, dass man tt ihrer Sinus die Bogen, statt ihrer Cosinus die heit setzen kann, und mit dieser Rücksicht erhält n, wenn man die erste Gleichung von der zweiten zieht

$$0 = (\sin p . \cos D - \cos p . \sin D . \cos t)\, \delta D - \cos p . \cos D . \sin t . \delta t$$

d hieraus ergiebt sich

$$\delta t = \frac{1}{\sin t} . (\tang p - \tang D . \cos t) . \delta D.$$

Es muss also um diese Correction berechnen zu können, die Declination der Sonne, die Polhöhe des Beobachtungsortes, der Stundenwinkel, und die Aenderung der Declination der Sonne innerhalb der Zwischenzeit beider Beobachtungen bekannt seyn. Die drei ersten Grössen braucht man nur ungefähr zu kennen, indem man für den Stundenwinkel die halbe Zwischenzeit der beiden Beobachtungen nimmt.

§. 457.

So beobachtete z. B. v. **Humboldt** (Voyage de Humboldt et Bonpland, IV partie, I Vol.) am 26. Januar 1799 in Barcelona die doppelte Höhe des obern Sonnenrandes, um $11^h\ 32'\ 31''$ und $12^h\ 42'\ 7''$. Der Zeitunterschied beträgt $1^h\ 9'\ 36''$ oder in Bogen ausgedrückt, indem man mit 15 multiplicirt $17^\circ\ 24'$, also

$$t = 8^\circ\ 42';$$
$$D = -21^\circ\ 4'\ 28'';$$
$$p = +41^\circ\ 22'\ 38''.$$

Die Abnahme der Declination in einer Stunde beträgt an diesem Tage $37''85$, also in der Zwischenzeit von $1^h\ 9'\ 36''$ ist dieselbe $= 43''80 = \delta D$. Man hat daher

$$\begin{array}{rl} \tang p = & 9.94494 \\ C. \sin t = & 0.82027 \\ \log \delta D = & \underline{1.64147} \\ & 2.40668 = 255{,}08 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \tang D = & 9.58586\, n \\ \cot t = & 0.81525 \\ \log \delta D = & \underline{1.64147} \\ & 2.04258\, n \\ & = -110{,}30. \end{array}$$

also $\delta t = 255{,}08 + 110{,}30 = 365''38$. Dividirt man dies durch 15, um statt der Bogensecunden, Zeitsecunden zu haben, so kommt $24''36$, und um so viel muss die nachmittägliche Beobachtungszeit vermindert werden. Sie wird daher

$$= 12^h\ 41'\ 42''64$$

folglich trat der Durchgang der Sonne durch den Meridian nach der Uhr um

$$\frac{11^h\ 32'\ 31'' + 12^h\ 41'\ 42''64}{2} = 12^h\ 7'\ 6''82$$

re der Gang der Uhr so beschaffen, dass
edeutend mehr oder weniger als 24 Stunden
zwei auf einander folgenden Culminationen
e zeigte, so müsste diese Verbesserung noch
ite Correction erleiden. Denn man sieht
ass wenn dieselbe in einem Sonnentage $24+a$
zeigte, die berechnete Correction (hier 24″36)
Verhältniss von $24+a:24$ vermehrt wer-
te, also statt des berechneten Werthes von
$\frac{24+a}{24}$ zu nehmen ist.

§. 458.

an pflegt gewöhnlich zur Bestimmung der Zeit
e correspondirende Höhen zu nehmen, um
i jeder Beobachtung zufälligen Fehler so viel
glich aufzuheben. Es ist aber dann nicht nö-
r jedes paar correspondirender Höhen die Mit-
besserung zu berechnen, sondern es ist hin-
id, dass man aus der vormittägigen Reihe so-
ls aus der nachmittägigen, das arithmetische
nimmt, und für diese Mittel blos die Correc-
erechnet. Folgende Beobachtungen welche v.
ldt in Valencia am 6. Februar 1799 anstellte,
i dies deutlicher zeigen.

Vormittag	Nachmittag
9^h 32′ 34″	3^h 4′ 44″
9. 34. 23.	3. 2. 55.
9. 35. 40.	3. 1. 45.
9. 36. 58.	3. 0. 21.
9. 39. 28.	2. 57. 52.
9. 41. 38.	2. 54. 45.
tel 9^h 36. 56″8	3^h 0. 23″7.

e Zwischenzeit beträgt 5^h 23′ 26″9 also in Gra-
° 51′ 43″5, folglich

$$t = 40^\circ\ 25'\ 51''7$$
$$p = 39.\ 28.\ 25.$$
$$D = -\ 15.\ 30.\ 54.$$

r den sechsten Februar hat man die stündli

Abnahme der Declination 46″14, folglich für die ganze Zwischenzeit von $5^h\ 23'\ 26''9$

$$\delta D = 248{,}72.$$

Es wird also

$tang\ p$	$= 9.91570$	$tang\ D$	$= 9.44392\,n$
$C.\ sin\ t$	$= 0.18807$	$cot\ t$	$= 0.06956$
$log\ \delta D$	$= 2.39571$	$log\ \delta D$	$= 2.39571$
	$2.49948 = 315{,}85$		$1.90919\,n$
			$= -\ 81{,}13$

folglich $\delta t = 315{,}85 + 81{,}13 = 396{,}98$, oder in Zeitsecunden $\delta t = 26{,}47$.

Da die Sonne sich dem Nordpol nähert, so muss diese Grösse von der nachmittägigen abgezogen werden, und es bleibt, wenn man statt 3 Uhr, 15 Uhr schreibt

Nachmittags	$15^h\ 59'\ 57''2$
Vormittags	$9.\ 36.\ 56''8.$
Hieraus das Mittel	$12^h\ 18'\ 27''0.$

§. 459.

Um zu zeigen dass diese abgekürzte Methode, den wahren Mittag aus mehreren correspondirenden Höhen der Sonne zu berechnen, von der strengen, wo jede Beobachtung einzeln corrigirt werden muss, nicht merklich abweicht, wollen wir für obige sechs Beobachtungen die Mittagsverbesserungen einzeln berechnen. Man hat

die Zwischenzeiten =	$5^h\ 32'\ 10''$
	$5.\ 28.\ 32.$
	$5.\ 26.\ 5.$
	$5.\ 23.\ 23.$
	$5.\ 18.\ 24.$
	$5.\ 13.\ 7.$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Stundenwinkel

$t =$	$41°\ 31'\ 15''$
	$41.\ 4.\ 00.$
	$40.\ 45.\ 37{,}5.$
	$40.\ 25.\ 22{,}5.$
	$39.\ 48.\ 00.$
	$39.\ 8.\ 22{,}5.$

Die entsprechenden Veränderungen der Declination der Sonne in den angegebenen Zwischenzeiten d folgende:

$\delta D = 255{,}44$	$\log \delta D = 2.40729$
252,62	2.40247
250,75	2.39924
248,68	2.39564
244,88	2.38895
240,79	2.38164.

Man erhält dann

$t = 317''36 + 80''18 = 397''54 = 26''50$	in Zeit
$316{,}70 + 80{,}58 = 397{,}28 = 26{,}49$	
$316{,}30 + 80{,}84 = 397{,}14 = 26{,}48$	
$315{,}85 + 81{,}14 = 396{,}99 = 26{,}47$	
$315{,}07 + 81{,}69 = 396{,}76 = 26{,}45$	
$314{,}18 + 82{,}23 = 396{,}41 = 26{,}43.$	

ieht man diese Grössen von den Zeiten der Nachittag angestellten Beobachtungen ab, so erhält man lgende Zeiten:

Vormittag	Nachmittag
$9^h\ 32'\ 34''$	$3^h\ 04'\ 17''50$
9. 34. 23.	3. 02. 28,51
9. 35. 40.	3. 01. 18,52
9. 36. 58.	2. 59. 54,53
9. 39. 28.	2. 57. 25,55
9. 41. 38.	2. 54. 18,57.

Man findet also aus jedem Paar correspondirenr Sonnenhöhen die Zeit des wahren Mittags nach r Uhr

$= 12^h\ 18'\ 25''75$
12. 18. 25,75
12. 18. 29,26
12. 18. 26,26
12. 18. 26,78
12. 18. 28,28

as Mittel hieraus giebt die Zeit

$12^h\ 18'\ 27''01.$

§. 460.

Wir haben bei der Entwickelung der Formel §. 456.)

$$\delta t = \frac{1}{\sin t}\,(tang\,p - tang\,D.\,cos\,t).\,\delta D$$
$$= \left(\frac{tang\,p}{\sin t} - tang\,D.\,cot\,t\right).\,\delta D$$

angenommen, dass die Grössen δt, δD so klein sind, dass die höhern Potenzen derselben vernachlässigt werden können, indem wir statt der Sinus dieser Bogen die Bogen selbst, und statt ihrer Cosinus die Einheit setzen. Es ist nun aber nothwendig zu untersuchen, wie gross der etwanige Fehler ist, den man bei diesen Voraussetzungen begehen kann. Man muss nun aber bemerken, dass bei der angewandten Berechnungsart die Declination der Sonne im Mittag gewählt wird, und statt des Stundenwinkels t, die Hälfte der Summe der beiden einzelnen Stundenwinkel t und $t + \delta t$ genommen ist, so dass obige Formel eigentlich so geschrieben werden muss

$$\delta t = \delta D.\left[\frac{tang\,p}{\sin(t + \frac{1}{2}\delta t)} - tg(D + \tfrac{1}{2}\delta D)\,cot(t + \tfrac{1}{2}\delta t)\right].$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$t + \tfrac{1}{2}\delta t = t', \qquad D + \tfrac{1}{2}\delta D = D'$$

so war unsere Rechnungsformel

$$\delta t = \delta D.\left(\frac{tang\,p}{\sin t'} - tang\,D'.\,cot\,t'\right).$$

Die beiden Gleichungen für $\sin h$ (§. 456.) lassen sich dann folgendermassen darstellen:

$$\sin h = \sin p.\,\sin(D' - \tfrac{1}{2}\delta D) + \cos p.\,\cos(D' - \tfrac{1}{2}\delta D').\,\cos(t' - \tfrac{1}{2}\delta t)$$
$$\sin h = \sin p.\,\sin(D' + \tfrac{1}{2}\delta D) + \cos p.\,\cos(D' + \tfrac{1}{2}\delta D).\,\cos(t' + \tfrac{1}{2}\delta t).$$

Nun hat man bekanntlich, wenn man die dritten Potenzen der Grössen δD, δt mit berücksichtigt

$$\sin(D' - \tfrac{1}{2}\delta D) = \sin D' - \tfrac{1}{2}\cos D'.\,\delta D - \tfrac{1}{8}\sin D'.\,\delta D^2 + \tfrac{1}{48}\cos D'\,\delta D^3$$
$$\cos(D' - \tfrac{1}{2}\delta D) = \cos D' + \tfrac{1}{2}\sin D'.\,\delta D - \tfrac{1}{8}\cos D'.\,\delta D^2 - \tfrac{1}{48}\sin D'.\,\delta D^3$$
$$\cos(t' - \tfrac{1}{2}\delta t) = \cos t' + \tfrac{1}{2}\sin t'.\,\delta t - \tfrac{1}{8}\cos t'.\,\delta t^2 - \tfrac{1}{48}\sin t'.\,\delta t^3.$$

Hierdurch wird der erste Ausdruck von $\sin h$

$$\sin h = \sin p.\,\sin D' - \tfrac{1}{2}\sin p.\,\cos D'.\,\delta D - \tfrac{1}{8}\sin p.\,\sin D'.\,\delta D^2 + \tfrac{1}{48}\cos D'\,\sin p.\,\delta D^3$$

$$+ \cos p.\cos D'\cos t' + \tfrac{1}{2}\cos p.\sin D'\cos t'.\delta D$$
$$- \tfrac{1}{6}\cos p.\cos D'\cos t'.\delta D^2$$
$$- \tfrac{1}{24}\cos p.\sin D'\cos t'.\delta D^3$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos p.\cos D'\sin t'.\delta t$$
$$+ \tfrac{1}{4}\cos p.\sin t'.\sin D'.\delta D.\delta t$$
$$- \tfrac{1}{16}\cos p.\cos D'.\sin t'.\delta t.\delta D^2$$
$$- \tfrac{1}{8}\cos p.\cos D'\cos t'\delta t^2$$
$$- \tfrac{1}{12}\cos p.\sin D'\cos t'.\delta t^2.\delta D$$
$$- \tfrac{1}{24}\cos p.\cos D'.\sin t'\delta t^3.$$

Den zweiten Ausdruck von $\sin h$ findet man aus diesem sogleich, wenn man nur statt $+\delta t$ und $+\delta D$, $-\delta t$ und $-\delta D$ setzt, weswegen wir denselben nicht hinschreiben wollen. Zieht man dann den ersten Ausdruck vom zweiten ab, so bleibt

$$0 = \delta D(\sin p.\cos D' - \cos p\sin D'\cos t')$$
$$- \delta t.\cos p.\cos D'\sin t'$$
$$+ \tfrac{1}{8}\cos p.\cos D'.\sin t'.\delta t.\delta D^2$$
$$+ \tfrac{1}{8}\cos p.\sin D'.\cos t'.\delta t^2.\delta D$$
$$- \tfrac{1}{24}(\sin p.\cos D' - \cos p.\sin D'.\cos t')\delta D^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}\cos p.\cos D'.\sin t'.\delta t^3$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$\frac{tang\, p}{\sin t'} - tang\, D'.\cot t' = A$$

nimmt, so lässt sich dies auch so ausdrücken:

$$0 = A.\delta D - \delta t + \tfrac{1}{8}\delta t.\delta D^2$$
$$+ \tfrac{1}{8}tang\, D'.\cot t'.\delta t^2.\delta D - \tfrac{1}{24}A.\delta D^3 + \tfrac{1}{24}\delta t^3.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$\delta t = A.\delta D + \frac{A}{24}\delta D^3(2 + 3A\, tang\, D'.\cot t' + AA)$$

wo man sieht, dass der Unterschied dem Cubus der Veränderung der Declination proportional, also ganz unmerklich ist, indem das erste Glied $A.\delta D$ des Werthes von δt dasjenige ist, nach welchem wir gerechnet haben.

Nehmen wir das §. 458. gewählte Beispiel wieder vor, so hat man daselbst

t	=	40° 25′ 51″7
p	=	39. 28. 25,0
D	=	− 15. 30. 54,0
δD	=	248″72
$A.\delta D$	=	396″98
$\log A$	=	0.20306.

und man findet hieraus den Werth von

$$\frac{2 + 3A.\ tang\ D'.\ cot\ t' + AA}{24} = 0{,}1244.$$

Diese Grösse muss noch mit $A.\delta D^3 = A.\delta D.(\delta D)^2$ d. h. mit

$$396''98.\left(\frac{248''72}{206265}\right)^2$$

multiplicirt werden, wo 206265 die Anzahl der Secunden eines Bogens bedeutet, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist. Führt man die Multiplication wirklich aus, so erhält man die Correction des Werthes von δt, in Bogensecunden $= 0''0000718$, welche Grösse gar nicht berücksichtigt werden kann.

§. 461.

Man begreift leicht, dass die Messung der correspondirenden Höhen der Sonne oder der Sterne dann dem geringsten Fehler ausgesetzt ist, wenn man dieselben in der Gegend ihrer Parallelkreise nimmt, wo sich die Höhe am schnellsten in gleichen Zeiten ändert. Um diesen Ort auszumitteln, nehme man die Gleichung

$$sin\ h = sin\ p.\ sin\ D + cos\ p.\ cos\ D.\ cos\ t.$$

und differentiire dieselbe in Hinsicht auf die beiden veränderlichen Grössen h und t, so kommt

Ferner erhält man aus demselben Dreieck

$$\sin E : \cos p = \sin SZP : \cos D$$

so kann man statt des Productes $\sin E . \cos D$ auch
$\cos p . \sin SZP$ setzen, so dass

$$\frac{dh}{dt} = - \cos p . \sin SZP$$

wird. Da nun der Winkel p constant, und der Win-
kel SZP das Azimuth ist, so sieht man hieraus, dass
die Höhenänderung am schnellsten an der Stelle statt
findet, wo der Sinus des Azimuths am grössten ist.
Für solche Himmelskörper, bei deren Durchgange
durch den Meridian, das Zenith zwischen dem Cul-
minationspunkte und dem Pol liegt, kann das Azi-
muth alle Werthe erhalten; folglich wird dann die
Höhenänderung am stärksten, wenn das Azimuth
90° beträgt, d. h. wenn dieselben durch den ersten
Verticalkreis gehen. Man hat dann im Dreieck SZP
(fig. 1.), weil SZP ein rechter Winkel wird

$$\cos SP = \cos ZS . \cos ZS$$

d. h. $$\sin \delta = \sin h . \sin p.$$

und hieraus ergiebt sich die Höhe

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{\sin p}.$$

Ist die Declination des Sterns südlich, so wird
$\sin h$ negativ, also geht der Stern unter dem Hori-
zont durch den ersten Verticalkreis, wo er nicht be-
obachtet werden kann. Sein grösstes Azimuth, so
lange er sichtbar ist, findet bei dem Aufgange oder
Untergange desselben statt; allein an dieser Stelle der
Himmelskugel nimmt man keine correspondirenden
Höhen, weil der Stand des Sterns wegen der Un-
sicherheit und Veränderlichkeit der Strahlenbrechung
in der Nähe des Horizonts zu ungewiss ist.

Ist die Declination des Sterns grösser als die Pol-
höhe, oder $\delta > p$, so wird der Quotient $\frac{\sin \delta}{\sin p}$, wel-
cher die Höhe des Sterns zur Zeit der vortheilhafte-
sten Beobachtung angiebt, grösser als die Einheit,
folglich $\sin h > 1$, also h unmöglich. Dies muss na-
türlich statt finden, da bei Sternen, deren Parallel-
kreis den Meridian zwischen dem Zenith und dem
Pol durchschneidet, der Durchgang durch den ersten

multiplicirt werden, wo 206265 die
cunden eines Bogens bedeutet, dess
Halbmesser gleich ist. Führt man di
wirklich aus, so erhält man die Corre
thes von ∂t, in Bogensecunden $= 0''0$
Grösse gar nicht berücksichtigt werde

§. 461.

Man begreift leicht, dass die Me
respondirenden Höhen der Sonne o
dann dem geringsten Fehler ausgesetzt
dieselben in der Gegend ihrer Parall
wo sich die Höhe am schnellsten in
ändert. Um diesen Ort auszumitteln,
Gleichung

$$\sin h = \sin p. \sin D + \cos p. \cos$$

und differentiire dieselbe in Hinsich
veränderlichen Grössen h und t,

$$\cos h. dH = - \cos p. \cos D$$

und hieraus die Geschwindigkeit

$$\frac{dh}{dt} = - \cos p. \cos D. \frac{\sin}{\cos}$$

Bezeichnet man nun den
ZSP im sphärischen Dreieck
so hat man

die Declination
nmt, und man
als die Einheit
Zeit ausgedrück-
immer kleiner
in der Zeitbe-
die Lage des
n ist. So bringt
48″, ein Fehler
072 in der Zeit

enn man um den
i Tage hinter ein-
hen nehmen will,
kten Himmels nur
n werden können.
Höhen als den Tag
ie mit den nachmit-
nd der Uhr für die
ht bestimmen. Die
lässt sich nun nach

ng *D. cot t*)

wohl auf die Vorzeichen
ionen des Winkels *t* ach-
Normalfall, aus welchem
ist, der Stundenwinkel *t*
Meridians aus nach Westen
is zu 360° fortgerechnet wer-
ch dann während der Beobach-
dem Nordpol, so muss der ge-
δt von der Zeit der zuletzt ge-
pondirenden Höhe abgezogen wer-
auf diejenige zu reduciren, welche
nderung der Declination der Sonne
haben würde. Folglich wird diese
enn man die Mittagsverbesserung sucht,
mittägigen, wenn man die Mitternachts-

Aus diesen Datis ergiebt sich die Rechnung folndermassen:

$tang\, p$	$= 0.05661$	$tang\, D$	$= 8.74292$
$C.\ sin\, t$	$= 0.16954\, n$	$cot\, t$	$= 0.03650\, n$
$log\, \delta D$	$= 3.03039$	$log\, \delta D$	$= 3.03039$
	$3.25654\, n$		$1.80981\, n$
	$- 1805{,}29$		$- 64{,}54$

lglich wird $\delta t = -1805{,}29 + 64{,}54 = -1740{,}75$, er in Zeit ausgedrückt

$$\delta t = -1'\ 56''05.$$

Zieht man dies von der Vormittags angestellten obachtung ab (wo man also wegen des negativen eichens von δt arithmetisch addiren muss), so erhält an die corrigirte Zeit der Beobachtung

$$= 21^h\ 6'\ 35''72.$$

Man hat also um die Zeit der wahren Mitterht nach der Uhr zu finden

Nachmittags	$= 2^h\ 45'\ 25''25$
Vormittags	$= 21.\ 6.\ 35{,}72$
halbe Summe	$= 11^h\ 56'\ 0''48$

elches die gesuchte Zeit ist.

§. 465.

Die bei den erwähnten Rechnungen nothwendige eclination der Sonne und südliche Veränderung derlben, findet man aus den astronomischen Ephemerim. Sollte die Polhöhe nicht bekannt seyn, so kann an dieselbe näherungsweise aus einer correspondirenden Höhen vermittelst der Formel

$$sin\, h = sin\, p.\ sin\, D + cos\, p.\ cos\, D.\ cos\, t$$

rechnen. Setzt man nämlich

$$cos\, t.\ cot\, D = tang\, \lambda,$$

erhält man auch

$$sin\, h = sin\, D\ (sin\, p + cos\, p.\ tang\, \lambda)$$

$$= sin\, D.\ \frac{sin(p + \lambda)}{cos\, \lambda}$$

lglich hieraus

$$sin(p + \lambda) = \frac{sin\, h.\ cos\, \lambda}{sin\, D}.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich zuerst $p + \lambda$, und da der Winkel λ bekannt ist, so hat man auch die Polhöhe p.

Wir wollen als Beispiel zwei correspondirende Höhen nehmen, die Baumenberger in Altburg am 27. März 1822 beobachtete; er fand nämlich

Vormittags 9ʰ 29′ 50″,0
Nachmittags 2. 42. 15,0

die doppelte Höhe des obern Sonnenrandes $= 65° 0'$, also die einfache Höhe $= 32° 30'$. Zieht man hiervon den Halbmesser der Sonne ab, der 16′ beträgt, so kommt die Höhe des Mittelpunkts

$$h = 32° 14' 0''.$$

Die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen beträgt 2ʰ 45′ 42″,5, also in Graden ausgedrückt

$$t = 41° 25' 37''.5.$$

Die Declination der Sonne ist des Mittags $+ 2° 58' 18''$, ihre stündliche Zunahme 58″,50, folglich muss man von der mittäglichen Declination noch die Veränderung für 2ʰ 45′ 42″,5 abziehen; diese beträgt 2′ 41″, also war die Declination der Sonne zur Zeit der ersten Beobachtung

$$D = 2° 55' 37''.$$

Man hat dann aus der Formel

$$\cos t . \cot D = \tang \lambda$$

$$\cos t = 9.87494$$

$$\cot D = 1.29133$$

§. 466.

ch die Beobachtung der correspondirenden öhen erhält man, wie schon gesagt ist, die wahren Mittags, und wenn die an zwei auf folgenden Tagen durch correspondirende öhen gefundenen Zeiten nach der Uhr genau den von einander entfernt sind, so würde die h wahrer Zeit gehen; allein da die wahre n gleichförmiges Maass ist, so muss man die eten wahren Zeiten, vermöge der Zeitglei- . 39.) die man in den Ephemeriden angegeben uf mittlere Zeit reduciren, und so den Gang gegen die mittlere Zeit bestimmen. Wir uns hierbei nicht auf eine weitere theoreti- tersuchung über die Berechnung der Zeit- g einlassen, da dieser Gegenstand der Astro- öllig angehört, und in jedem Lehrbuche die- senschaft weitläufig aus einander gesetzt ist. ollen daher blos durch ein Beispiel zeigen, ı durch eine Reihe von Beobachtungen der r Uhr bestimmen lässt. Vermittelst der cor- renden Sonnenhöhen fand v. Humboldt in as folgende Zeiten des wahren Mittags nach hr

December	1	. . . . .	$3^h\ 21'\ 34''8$
—	8	. . . . .	3. 24. 47,0
—	31	. . . . .	3. 30. 3,9
Januar	12	. . . . .	3. 32. 15,8
—	21	. . . . .	3. 33. 7,1
Februar	1	. . . . .	3. 32. 27,8
—	3	. . . . .	3. 32. 8,6.

Werth der Zeitgleichung betrug an diesen

December	1	. . . . .	+ 10′ 28″8
—	8	. . . . .	+ 7. 33,5
—	31	. . . . .	— 3. 38,7
Januar	12	. . . . .	— 8. 51,2
—	21	. . . . .	— 11. 49,1
Februar	1	. . . . .	— 14. 3,3
—	3	. . . . .	— 14. 16,7.

t man diese Zeitgleichung, mit Rücksicht auf zeichen, zu den angegebenen Zeiten des wah-

ren Mittags, so erhält man die mittlere Zeit n
der Uhr

1799. December	1	. . . . .	$3^h\ 34'\ 3''6$
—	8	. . . . .	3. 32. 20,5
—	31	. . . . .	3. 26. 25,2
1800. Januar	12	. . . . .	3. 23. 24,6
—	21	. . . . .	3. 21. 18,0
Februar	1	. . . . .	3. 18. 24,5
—	3	. . . . .	3. 17. 51,9.

Man sieht hieraus, dass die Uhr gegen mitt
Zeit etwas zu langsam ging. Um ihre tägliche V
zögerung zu erhalten, ziehe man immer zwei
einander folgende Angaben von einander ab, und
vidire den Unterschied durch die Anzahl der zwisc
den Beobachtungen verflossenen Tagen, so erhält
die Verzögerung

vom 1. December	bis	8. December	— 14'
— 8. —	—	31. —	— 15.
— 31. —	—	12. Januar	— 15
— 12. Januar	—	21. —	— 14
— 21. —	—	1. Februar	— 15.
— 1. Februar	—	3. —	— 16

Die Verzögerung ist daher ziemlich gleichför
gewesen, und wir können ohne merklichen Fe
annehmen, dass dieselbe der Zeit proportional ist
dass, wenn M die Zeit des Mittags an irgend ei
Tage angiebt, der Mittag x nach t Tagen durch

$$x = M - at$$

ausgedrückt wird. Um die Grössen M und a so
nau als möglich zu finden, kann man sich der
thode der kleinsten Quadrate bedienen, indem
die Bestimmung so macht, dass die Summe der Q
drate der Unterschiede zwischen den berechneten
beobachteten Zeiten des Mittags ein Minimum w
Nimmt man den Mittag des 31. Decembers 1799
den Anfang der Zählung der Tage an, so sind
vorher fallenden Werthe von t negativ, und
hat folgende Bedingungsgleichungen

$$3^h\ 34'\ 3''6 = M + 30a$$
$$3.\ 32.\ 20,5 = M + 23a$$
$$3.\ 26.\ 25,2 = M + 0a$$
$$3.\ 23.\ 24,6 = M - 12a$$

$$3^h\ 21'\ 18''0 = M - 21\,a$$
$$3.\ 18.\ 24,5 = M - 32\,a$$
$$3.\ 17.\ 51,9 = M - 34\,a.$$

Um die Rechnung etwas einfacher zu machen, tze man

$$M = 3.\ 26.\ 25,2 + m$$
$$a = 15'' + a$$

erhält man folgendes System von Bedingungsgleiungen, indem man alles in Zeitsecunden ausdrückt

$$+\ 8''4 = m + 30\,a$$
$$+\ 10,3 = m + 23\,a$$
$$0 = m + 0\,a$$
$$-\ 0,6 = m - 12\,a$$
$$+\ 7,8 = m - 21\,a$$
$$-\ 0,7 = m - 32\,a$$
$$-\ 3,3 = m - 34\,a.$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man die ndamentalgleichung für m

$$+\ 21''9 = 7m - 46\,a.$$

Multiplicirt man jede der Gleichungen durch den efficienten von a, so erhält man folgende Gleiungen

$$+\ 252''0 = +\ 30\,m + 900\,a$$
$$+\ 236,9 = +\ 23\,m + 529\,a$$
$$0 = +\ 0\,m + 0\,a$$
$$+\ 7,2 = -\ 12\,m + 144\,a$$
$$-\ 163,8 = -\ 21\,m + 441\,a$$
$$+\ 22,4 = -\ 32\,m + 1024\,a$$
$$+\ 112,2 = -\ 34\,m + 1156\,a$$

id die Summe dieser Gleichungen giebt die Fundaentalgleichung für a

$$+\ 456''9 = -\ 46\,m + 4194\,a.$$

Lösst man diese beiden Fundamentalgleichungen f, so erhält man

$$m = +\ 4''1425$$
$$a = +\ 0''1543$$
$$M = 3^h\ 26'\ 29''3425$$
$$a = +\ 15''1543$$

lglich wird die Gleichung für den Mittag

$$x = 3^h\ 26'\ 29''3425 - 15''1543\,t$$

id man findet die Fehler der einzelnen Bestimmunn des Mittags

nachdem man den beobachteten oder mittlern Ort haben will.

§. 468.

Wir wollen diese Formeln auf ein Beispiel anwenden, indem wir die grade Aufsteigung des Sirius für den 20. Januar 1799 aufsuchen. Für den 1. Jan. 1802 hat man

$$\alpha = 99^\circ\ 6'\ 19''85$$
$$\delta = -16^\circ\ 27'\ 13''$$

und hierdurch erhält man die Präcession in der graden Aufsteigung

$$\begin{aligned} tang\,\delta &= 9.47031\,n \\ sin\,\alpha &= 9.99449 \\ log\,19''948 &= 1.29990 \\ \hline & \ 0.76470\,n \\ \hline & -\ 5''817 \\ & +\ 45''958 \\ \hline & +\ 40''141. \end{aligned}$$

Die jährliche Zunahme beträgt daher 40″141, dies giebt für 3 Jahr weniger 20 Tage rückwärts gerechnet 1′ 58″19, also die mittlere grade Aufsteigung am 20. Januar 1799

$$\alpha = 99^\circ\ 4'\ 22''04.$$

Um die beiden andern Correctionen zu berechnen, hat man für den 20. Januar 1799

$$\begin{aligned} \Omega &= 51^\circ\ 30', & \odot &= 300^\circ\ 30', \\ \alpha - \Omega &= 47^\circ\ 34', & \alpha + \Omega &= 150^\circ\ 34', \\ \alpha - \odot &= 158^\circ\ 34', & \alpha + \odot &= 39^\circ\ 34'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log\,16{,}534 &= 1.21838 & log\,8{,}401 &= 0.92433 \\ sin\,\Omega &= 9.89354 & tang\,\delta &= 9.47031\,n \\ \hline & \ 1.11192 & cos(\alpha - \Omega) &= 9.82913 \\ \hline & \ 12{,}940 & & \ 0.22377\,n \\ \hline & & & -\ 1{,}674. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log\,1{,}229 &= 0.08955 \\ tang\,\delta &= 9.47031\,n \\ cos(\alpha + \Omega) &= 9.93998\,n \\ \hline & \ 9.49984 \\ \hline & +\ 0{,}316. \end{aligned}$$

t geschieht, die Culmination des Sterns auch
tlerer Zeit kennen. Es sey hierzu die grade
igung der Sonne im wahren Mittag $= a$, die
erns $= \alpha$, so culminirt die Sonne nach dem
nach einem Zeitraume, der dem Unterschiede
aden Aufsteigung, durch 15 dividirt, gleich ist
ı wir α grösser als a annehmen), folglich wür-
Culmination des Sterns um $\frac{\alpha - a}{15}$ statt finden.

dieser Ausdruck ist Sternzeit, man muss da-
ım mittlere Zeit zu erhalten, hiervon die Vor-
der Fixsterne gegen mittlere Zeit, die in 24
en 3′ 55″91 beträgt, abziehen, und der Stern
ıirt um

$$\frac{\alpha - a}{15} - \frac{\alpha - a}{15} \cdot \frac{3' 55''91}{24}$$

ler Sonne. Addirt man diese Grösse zur mitt-
Zeit im wahren Mittage, wo die Culmination
onne statt findet, so erhält man die mittlere
ler Culmination des Sterns. Die grade Aufstei-
der Sonne und die mittlere Zeit im wahren
ge, findet man aus den astronomischen Ephemc-

Die grade Aufsteigung des Sterns ist aber ge-
ich nur für einen bestimmten Zeitpunkt ange-
, und muss wegen der Präcession, Aberration
lutation verbessert werden. Wir müssen uns
lamit begnügen, dass wir die Formeln für diese
ction angeben, ohne weiter die Entstehung und
hen derselben aus einander zu setzen. Man be-
ıe die grade Aufsteigung des Sterns wie vorher
α, seine Declination durch δ, die Länge der
durch $\odot$, die Länge des aufsteigenden Monds-
durch Ω, so hat man

sion $= 45''958 + 19''948 \; tang\, \delta . \; sin\, \alpha .$

tion $= -16''534 \; sin\, \Omega - 8''401 \; tang\, \delta . cos(\alpha - \Omega)$
$- 1''229 \; tang\, \delta . cos(\alpha - \Omega)$

tion $= -19''417 \; \frac{cos(\alpha - \odot)}{cos\, \delta} + 0''836 \; \frac{cos(\alpha + \odot)}{cos\, \delta} .$

durch diese Formeln sich ergebenden Grös-
sen zu den mittlern Ort der Sterne hinzuge-
der vom beobachteten abgezogen werden, je

$$\begin{aligned} \alpha - a &= 156^\circ\ 19'\ 35''86 \\ \frac{\alpha - a}{15} &= 10^h\ 25'\ 18''39 \\ \text{Voreilung} &= -\ \ 1'\ 42''39 \\ &\quad 10^h\ 23'\ 36''00. \end{aligned}$$

Hierzu die mittlere Zeit im wahren Mittag addirt, giebt die Culmination des Sirius nach mittlerer Zeit $= 10^h\ 35'\ 9''6$.

Die Uhr zeigte $10^h\ 30'\ 34''75$, folglich blieb sie $4'\ 29''9$ hinter der mittlern Zeit zurück.

§. 470.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der geographischen Breite des Beobachtungsortes über. Bezeichnet man die Höhe der Sonne oder eines Sternes im Meridian durch H, seine Declination durch δ, die Polhöhe des Ortes durch p, so sieht man leicht, dass diese Grössen durch die Gleichung

$$90 - p = H - \delta$$

mit einander verbunden sind; ist die Declination des Sterns südlich, so ändert sich das Vorzeichen von δ, da bekanntlich die südlichen Declinationen als negativ betrachtet werden müssen. Hieraus erhält man sogleich

$$p = 90 + \delta - H$$

so dass also durch eine einzige Beobachtung des Himmelskörpers im Meridian die Polhöhe gefunden ist, da man die hierzu nothwendige Declination für die Sonne aus den Ephemeriden, und für die Fixsterne aus den Sterncatalogen entnehmen darf. Die mittlere Declination die man in den Catalogen findet, muss natürlich eben so wohl wie §. 467. die grade Aufsteigung durch die Präcession, Nutation und Aberration verbessert werden, und wir setzen die dazu gehörigen Formeln sogleich hierher, indem wir die §. 467. gewählten Bezeichnungen beibehalten

$$\begin{aligned} \text{Präcession} &= 19''948\ \cos\alpha \\ \text{Nutation} &= 8''401\ \sin(\alpha - \Omega) + 1''229\ \sin(\alpha + \Omega) \\ \text{Aberration} &= 18''580\ \sin\delta.\ \cos\odot.\ \sin\alpha \\ &\quad - 20''253\ \sin\delta.\ \sin\odot.\ \cos\alpha \\ &\quad - 8''060\ \cos\delta.\ \cos\odot. \end{aligned}$$

§. 471.

Wir wollen diese Formeln gleich zur Bestimmung Declination des Sirius am 20. Januar 1799 an-en, da wir dieselbe nachher bei einer Breiten-nmung, welche wir als Beispiel wählen wollen, uchen werden. Die mittlere Declination dieses s am 1. Januar 1802 ist folgende:

$$\delta = -16^\circ\ 27'\ 13''4$$

vermittelst dieses Werthes, nebst den für α, $\odot$, angegebenen Werthen ergiebt sich nach vorigen eln für die Präcession

$$\begin{aligned} \log 19''948 &= 1.29990 \\ \cos\alpha &= 9.19935\,n \\ \hline & 0.49925\,n \\ \hline & -3''157. \end{aligned}$$

Diese jährliche Abnahme der Declination giebt 3 Jahre weniger 20 Tage rückwärts gerechnet '301, und hierdurch die mittlere Declination des s am 20. Januar 1799

$$\delta = -16^\circ\ 27'\ 4''099.$$

Für die Nutation findet sich

g 8,401	= 0.92433	$\log$ 1,229	= 0.08955
$(\alpha-\Omega)$	= 9.86809	$\sin(\alpha-\Omega)$	= 9.69144
	0.79242		9.78099
	+ 6″200		+ 0″604.

Nutation = + 6″804.

Für die Aberration erhält man

r 18″580	= 1.26905	$\log$ 20,253	= 1.30649
$\sin\delta$	= 9.45215n	$\sin\delta$	= 9.45215n
$\cos\odot$	= 9.70547	$\sin\odot$	= 9.93532n
$\sin\alpha$	= 9.99453	$\cos\alpha$	= 9.19935n
	0.42120n		9.89331n
	− 2″638		− 0″682.

$$\begin{aligned} \log 8''060 &= 0.90634 \\ \cos\delta &= 9.98184 \\ \cos\odot &= 9.70547 \\ \hline & 0.59365 \\ \hline & +3''923. \end{aligned}$$

$\frac{H-h}{2} \cdot \cos\frac{H+h}{2} = \cos p \cdot \cos\delta \cdot \sin\frac{1}{2}t^2$.

enn der Unterschied der Höhen sehr klein ist, is man die Bogen statt der Sinus setzen kann, d

$$\delta H = \frac{\cos p \cdot \cos\delta}{2\cos h} \cdot t^2$$

man den Unterschied der Höhen $H-h=\delta H$, att $\frac{H+h}{2}$, h nimmt. Dass die Polhöhe, wel- st gesucht wird, selbst schon in der Formel mmt, thut nichts, indem man zur ersten An- ng die der Culmination am nächsten liegenden als eine im Meridian selbst beobachtete betrach- d aus derselben nach §. 470. die Polhöhe ableitet.

§. 473.

he man aber die beobachteten Höhen auf diese ehandeln kann, muss an denselben noch eine sserung angebracht werden, da die vom Stern mmenden Strahlen in der Atmosphäre eine Bre- erleiden, welche die beobachtete Höhe grösser als die wahre. Diese unter dem Namen der omischen Strahlenbrechung bekannte Correction, man in den meisten astronomischen Jahrbüchern, onnoissance de temps, dem Nautical Almanac, ielen Lehrbüchern der Astronomie in Tafeln cht, vermöge deren sich dieselbe für jede indi- le Höhe, den dabei statt findenden Barometer- und Temperatur, sehr leicht berechnen lässt. ehr einfache Formel, die sich ohne merklichen von 90 bis 20 Grad Höhe anwenden lässt, ist de: man bezeichne die beobachtete Höhe durch e Temperatur in Graden des Centesimalthermo- s durch t, den constanten Coefficienten 0,00375 c, das Verhältniss des Barometerstandes zu nittlern von 0,76 Meter, oder 28,075 par. Zoll, 29,921 engl. Zoll, durch $1+\Delta p$, so ist

$$\text{fraction} = \frac{60''643}{tang\, h} \cdot \frac{1+\Delta p}{1+ct} - \frac{0''068}{\sin h^2}.$$

Den Logarithmen von $1 + \Delta p$ findet man nach den gebräuchlichsten Maassen durch die Ausdrücke

log metres — 9.88081
log engl. Zoll — 1.47598
log par. Zoll — 1.44832.

Der Logarithme der Constante 60″634 ist = 1.78272.

§. 474.

Um die geographische Breite oder Polhöhe von Montserrat zu bestimmen, beobachtete von Humboldt am 20. Januar 1799 den Sirius nahe bei seiner Culmination, und fand folgende Höhen

Höhe	Zeit der Uhr
31° 58′ 52″	10^h 30′ 17″
31. 58. 42.	10. 33. 46.
31. 57. 32.	10. 37. 49.

Die Temperatur ist zu 11° Cent. Therm. angegeben, und für den Barometerstand wollen wir den mittlern annehmen, so dass also $1 + \Delta p = 1$, $1 + \alpha = 1{,}04125$ wird. Man erhält dann für die einzelnen Höhen

Refraction = 1′ 33″00
— = 1. 33,01
— = 1. 33,07

Zieht man diese von den beobachteten Höhen ab, so erhält man die wahren. Die Stundenwinkel, welche der Sirius zu den Beobachtungszeiten hatte, ergeben sich leicht aus seiner Culminationszeit, die nach der Uhrzeit (§. 469.) um 10^h 30′ 39″75 statt fand; man braucht nämlich nur die Zeitunterschiede 22″75; 3′ 6″25; 7′ 9″25 nur mit 15 zu multipliciren, nachdem man die Voreilung der Fixsterne in dieser Zeit hinzugefügt hat, da die Uhr nach mittlerer Zeit geht. Ist der Gang der Uhr nach Sternzeit, so ist diese Correction nicht nöthig. Im Allgemeinen kann man dieselbe immer ohne merklichen Fehler wegen ihrer Geringfügigkeit, da die Zeiten so klein sind, vernachlässigen, und wir bringen dieselbe blos der Vollständigkeit wegen mit an. Sie beträgt für die drei Zeiten 0″06, 0″52, 1″19. Man hat dann

ahre Höhen	Stundenwinkel
° 57′ 19″00	0° 5′ 42″15
. 57. 8,99	0. 46. 41,55
1. 55. 58,93	1. 47. 36,60.

Declination des Sterns beträgt nach §. 471.

$$\delta = -16^\circ\ 26'\ 57''6$$

genäherte Polhöhe $p = 90 + \delta - H$ (§. 470.), an $H = 31^\circ\ 57'\ 19''$ nimmt, welche die der ion am nächsten liegende Höhe ist (§. 472.)

$$p = 41^\circ\ 35'\ 43''.$$

durch erhält man die drei Correctionen

$$\delta H = 0''24;\ 16''08;\ 1'\ 25''38$$

die Höhen bei der Culmination

57′ 19″00	+ 0″24	= 31° 57′ 19″24
57. 8,99	+ 16,08	= 31. 57. 25,07
55. 58,93	+ 1′ 25,38	= 31. 57. 24,31
	Mittel	= 31° 58′ 22″37

Polhöhe $p = 41^\circ\ 35'\ 39''5$. Es würde der nicht werth seyn, die Rechnung mit dieser Polhöhe zu wiederholen, da sie so wenig von genommenen abweicht.

§. 475.

iese Rechnung, welche für eine grosse Anzahl Beobachtungen etwas beschwerlich wird, lässt eicht folgendermassen abkürzen, wenn alle Hö- sehr nahe bei der Culmination genommen sind, die Näherungsformel für δH (§. 472.) verlangt. nämlich die beobachteten Höhen h, h', h'' . . ., ugehörigen Refractionen ρ, ρ', ρ'' . . . ., die Cor- onen wegen des Stundenwinkels δh, $\delta h'$, $\delta h''$ . . ., ist die Anzahl aller Beobachtungen $= n$, so sieht , dass das Endresultat durch

$$\frac{-\rho + \delta h) + (h' - \rho' + \delta h') + (h'' - \rho'' + \delta h'') + \ldots}{n}$$

edrückt wird. Dies lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{h + h' + h'' + \ldots}{n} - \frac{\rho + \rho' + \rho'' + \ldots}{n} + \frac{\delta h + \delta h' + \delta h'' + \ldots}{n}.$$

Man setze nun den Quotienten $\frac{h + h' + h'' + \ldots}{n}$ $= h^\circ$, und die dieser mittlern Höhe zugehörige Strahlenbrechung $= \rho$, so kann man wegen des geringen Unterschiedes der einzelnen Höhen annehmen, es sey

$$\rho + \rho' + \rho'' + \ldots = n\rho^\circ.$$

Auf gleiche Weise lässt sich auch der Factor der Correction δH, nämlich $\frac{\cos p . \cos \delta}{2 \cos h}$ als unveränderlich betrachten, und nennt man die einzelnen Stundenwinkel t, t', t'', ..., so wird

$$\delta h + \delta h' + \delta h'' = \frac{\cos p . \cos \delta}{2 \cos h} (tt + t't' + t''t'' + \ldots)$$
$$= \frac{\cos p . \cos \delta}{2 \cos h} . \Sigma t^2$$

folglich lässt sich das Endresultat auf einmal so ausdrücken:

$$h^\circ - \rho^\circ + \frac{\cos p . \cos \delta}{\cos h} . \frac{\Sigma t^2}{2n}$$

wo man für h das von der Strahlenbrechung befreiete Mittel nimmt.

Statt der Quadrate von t nimmt man die Quadrate der Sinus von t und multiplicirt dieselben um Secunden zu erhalten, mit der bekannten Zahl $206265''$. Wendet man dies auf voriges Beispiel an, so hat man

$h = 31^\circ\ 58'\ 52''$
$h' = 31.\ 58.\ 42.$
$h'' = 31.\ 57.\ 32.$
$h^\circ = 31^\circ\ 58'\ 22''00$
$\rho^\circ = \quad 1'\ 35,03$
$31^\circ\ 56'\ 48''97$

$$\frac{\Sigma t^2}{2n} = \frac{240''67}{6} = 40''11.$$

$\log 40''11 = 1.60325$
$\cos p = 9.87382$
$\cos \delta = 9.98185$
$C. \cos h = 0.07132$
$1.53024 = 33''90.$

Addirt man dies zu dem vorigen Werthe von $h^\circ - \rho^\circ$, so kommt das Endresultat

$$31^\circ\ 57'\ .\ 87,$$

ganz genau als vorher.

§. 476.

Wählt man statt eines Fixsterns die Sonne oder einen andern Himmelskörper, der eine merkliche Bewegung besitzt, so kommen ausser der Correction wegen des Stundenwinkels und der Strahlenbrechung noch andere kleine Verbesserungen hinzu. Ein jeder Himmelskörper, bei welchem eine Bewegung merklich ist, zeigt sich durch Fernröhre wenigstens immer als eine Scheibe von merklicher Ausdehnung, und man pflegt daher die Höhe des obern oder untern Randes der Scheibe zu nehmen; da aber alle Berechnungen der Lage der Himmelskörper für ihren Mittelpunkt gelten, so sieht man, dass erstens von der beobachteten Höhe der Halbmesser der Scheibe abgezogen oder zu derselben hinzuaddirt werden muss, um die Höhe des Mittelpunkts zu haben, jenachdem der obere oder der untere Rand als fester Punkt diente. Genau genommen muss die Refraction schon vorher von der Höhe abgezogen worden seyn, weil die Strahlenbrechung den verticalen Durchmesser verkürzt, und die Tafeln oder Ephemeriden den zur Correction nothwendigen Halbmesser des Himmelskörpers so geben, wie er ohne Refraction sich zeigen würde, allein da in solchen Höhen über dem Horizont, die man bei diesen Beobachtungen anwendet, diese Verkürzung sehr geringfügig ist, so kann man jede dieser beiden Correctionen zuerst vornehmen. Ferner muss man berücksichtigen, dass Himmelskörper dieser Art keine so grosse Entfernung von der Erde besitzen, dass der Abstand des Beobachters von der Drehungsaxe der Erde als unendlich klein gegen dieselbe angesehen werden kann. Hierdurch erscheint die Höhe immer kleiner als sie dann seyn würde, wenn sich der Beobachter im Mittelpunkte der Erde befände, und der Unterschied beider Höhen wird die Höhenparallaxe genannt. Da wir späterhin bei der Bestimmung der geographischen Längen ausführlicher von den Parallaxen und ihrer Berechnungs-

art handeln werden, so mag es hier hinre
blos die Formel anzugeben, nach welcher dies
henparallaxe berechnet wird. Bezeichnet man
lich die Höhenparallaxe, die sich in den Ephem
findet, durch π, die Höhe durch h, so ist die C
welche zu der beobachteten Höhe hinzugefügt
den muss $= \pi . \cos h$. Bei der Sonne, die ge
lich zu Breitenbestimmungen dieser Art angev
wird, ist der Werth von π in ihrer mittlern E
nung nach Enke's Bestimmungen $= 8''58$, u
jeder andern Entfernung die sich zur mittler
$r : 1$ verhält, wird sein Werth $= \frac{8''58}{r}$. Na
man durch diese Correctionen, der Refractio
Halbmessers, der Höhenparallaxe, die wahre
erhalten hat, geht man zu der Verbesserung
die aus dem Stundenwinkel und der veränder
Declination entsteht. Um die hierzu nothwe
Formel abzuleiten, nehmen wir an, dass die
sich dem Nordpol nähere, und setzen ihre Decli
bei der Beobachtung vor der Culmination $= \delta$
zur Zeit der Culmination δ, so haben wir mit
Beibehaltung der §. 472. gebrauchten Charactere

$$\sin h = \sin p . \sin(\delta - d\delta) + \cos p . \cos(\delta - d\delta)$$
$$\sin H = \sin p . \sin \delta + \cos p . \cos \delta .$$

Da die Grösse $d\delta$ sehr klein ist, so haben
mit Vernachlässigung der Potenzen dieser Grös
$$\sin h = \sin p . \sin \delta - \sin p . \cos \delta . d\delta$$
$$+ \cos p . \cos \delta . \cos t + \cos p . \sin \delta . \cos t$$
und hieraus durch Subtraction
$$\sin H - \sin h = \cos p . \cos \delta (1 - \cos t) + \sin p . \cos$$
$$- \cos p . \sin \delta . \cos t . d\delta .$$

Nun ist aber

$$\sin H - \sin h = 2 \sin \frac{H - h}{2} . \cos \frac{H + h}{2}$$
$$= \delta H . \cos h$$
$$1 - \cos t = 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 = \tfrac{1}{2} t^2$$

und in dem mit $d\delta$ multiplicirten Gliede kann
ohne Weiteres $\cos t = 1$ setzen, wodurch beide
der sich auf $\sin(p - \delta) . d\delta$ reduciren. Es wird d

$$\delta H = \frac{\cos p . \cos \delta}{\cos h} . t^2 + \frac{\sin(p - \delta)}{\cos h} . d\delta$$

n Meridian hat man nach §. 470. $H = 90° - \delta$), also auch $\cos H = \sin(p - \delta)$, und da h von r Voraussetzung zufolge nur wenig verschieden kann man den Factor $\frac{\sin(p-\delta)}{\cos h} = 1$ setzen, s wird

$$\delta H = \frac{\cos p.\ \cos \delta}{\cos h}.\ t^2 + d\delta.$$

ntfernt sich die Sonne während der Zeit der chtungen vom Pol, so muss man $d\delta$ abziehen, zu addiren. Das erste Glied dieser Formel ist dasselbe, welches bei den Beobachtungen der rne angewendet wurde.

§. 477.

Vir wollen zuerst die Rechnung an einem Beigenau durchführen, und dann zeigen, wie man nliche Art als §. 475. Abkürzungen anbringen

Zur Breitenbestimmung von Barcelona bete v. Humboldt folgende Höhen des obern nrandes am 15. Januar 1799 *)

Höhe	Zeit
27° 47′ 56″0	11ʰ 53′ 47″
27. 48. 56,0	11. 55. 38.
27. 49. 53,5	11. 58. 00.
27. 50. 33,5	0. 04. 30.
27. 49. 53,5	0. 11. 16.
27. 48. 56,0	0. 12. 48.
27. 47. 56,0	0. 14. 54.

ie Temperatur ist zu + 10° des Centesimalometers angegeben, und den Barometerstand wir dem mittlern gleich. Wir erhalten hiernach §. 473. die Refractionen

50″54; 1′ 50″46; 1′ 50″39; 1′ 50″84
50,39; 1. 50,46; 1. 50,54.

Halbmesser der Sonne beträgt am 15. Januar 16′ 18″63, und zieht man diesen sowohl als

---

rch einen Druckfehler steht daselbst der 26. Januar (Recueil d'Observ. et

die Refractionen von den beobachteten Höhen ab, bleiben folgende Höhen

27° 29′ 46″73,
27. 30. 46,81,
27. 31. 44,48,
27. 32. 24,53,
27. 31. 44,48,
27. 30. 46,81,
27. 29. 46,73,

die nur noch von der Parallaxe zu befreien sind. Grösse π wird für diese Zeit = 8″72, und π für alle Beobachtungen = 7″73, welches zu den ten Höhen addirt werden muss. Die Stundenw ergeben sich leicht aus der Culmination der S die nach der Uhr aus correspondirenden Höhe schlossen, um 0ʰ 4′ 12″ statt fand. Die Redu der Zeit auf Bogen geschieht hierbei blos durch Multiplication durch 15, da die nach mittlere gehende Uhr zu wenig von der wahren Sonne abweicht. Man erhält dann

wahre Höhe	Stundenwinkel
27° 29′ 54″46	+ 2° 36′ 15″
27. 30. 54,54	2. 8. 30.
27. 31. 52,21	1. 33. 00.
27. 32. 32,25	— 0. 04. 30.
27. 30. 52,21	1. 46. 00.
27. 30. 54,54	2. 09. 00.
27. 29. 54,46	2. 40. 30.

Die Declination der Sonne ergiebt sich aus astronom. Jahrbuche 1799 für Berlin am 15. Jan

= — 21° 4′ 50″

und die stündliche Näherung gegen den Nordpo 27″96. Da nun Barcelona 57′ in Zeit westlicher als Berlin, so wird man die Proportion

60′ : 57′ = 27″96 : 26″56

bilden, und diese 26″56 zu der obigen Declin addiren, um diejenige Declination zu erhalten, der Culmination der Sonne in Barcelona entspr Sie wird δ = — 21° 4′ 23″44.

Nimmt man die beobachtete Höhe von 27° 32″ die der Culmination am nächsten liegt, als

ian beobachtet an, so erhält man dadurch die
ərte Polhöhe

$$p = 41° 23' 5''$$

ie Correctionen wegen der Stundenwinkel und
derung der Declination sind

$\frac{\cos p . \cos \delta}{2 \cos h} . t^2$	$d\delta$
+ 2′ 48″04	+ 4″87
+ 1. 53,70	+ 3,96
+ 1. 02,16	+ 2,89
+ 0. 00,14	— 0,14
+ 1. 17,39	— 3,30
+ 1. 54,58	— 4,01
+ 2. 57,30	— 5,02

ı sind die wahren Höhen bei der Culmination
)nne:

29′ 54″46	+ 2′ 52″91	=	27° 32′ 47″37
30. 54,54	+ 1. 57,66	=	52,20
31. 52,21	+ 1. 05,05	=	57,26
32. 32,25	+ 0. 00,00	=	32,25
31. 52,21	+ 1. 14,09	=	66,30
30. 54,54	+ 1. 50,57	=	45,51
29. 54,46	+ 2. 52,28	=	46,74
	Mittel		27° 32′ 49″66
		δ =	— 21. 4. 23,44
			48. 37. 13,10
			90. 00. 00,00
		p =	41. 22. 46,90.

§. 478.

'enn man nicht die Mittagshöhen aus den ein-
Beobachtungen wissen will, sondern sich mit
ıdresultat begnügt, so kann man die Rechnung
ermassen sehr abkürzen. Man nehme das
aus allen Beobachtungen $= h°$, befreie dieses
r Strahlenbrechung $\varrho°$, ziehe den Halbmesser
nne ab und addire die Höhenparallaxe, so er-
ın eine Höhe h, aus der man die Polhöhe nä-
sweise hat, indem man sie als die mittägliche
ler Sonne betrachtet. Dann addire man die
tion wegen des Stundenwinkels

$$\frac{\cos p.\ \cos\delta}{\cos h} \cdot \frac{\Sigma.\ t^2}{2n}$$

so hat man nur noch die Correction wegen der V
änderung der Declination $d\delta$ anzubringen. D
Grösse ist dem Stundenwinkel proportional; n
man daher die Aenderung der Declination inner
vier Zeitminuten oder eines Grades, f, so hat
die einzelnen Werthe von $d\delta$, $\frac{ft}{1^\circ}$, $\frac{ft'}{1^\circ}$, $\frac{ft''}{1^\circ}$ u. s
und wenn n die Anzahl der Beobachtungen beze
net, so hat man zu der vorigen Höhe noch die Gr

$$\frac{ft + ft' + ft'' + \ldots}{n.\ 1^\circ} = f.\frac{\Sigma t}{n.\ 1^\circ}$$

zu addiren, wo die Stundenwinkel vor der Culmi
tion als positiv, nach derselben als negativ zu
trachten sind. Die Summe giebt das Mittel aus a
einzelnen Mittagshöhen. Aus vorigem Beispiel
man

h°	=	27° 49′ 09″21
ρ°	= −	1. 50,45
Halbmesser	= −	16. 18,63
Parallaxe	= +	7,73
		27° 31′ 7,86 = h.

Hieraus folgt die genäherte Polhöhe

$$p = 41^\circ\ 24'\ 29''$$

$$\frac{\cos p.\ \cos\delta}{\cos h} \cdot \frac{\Sigma\, t^2}{2n} = \frac{1426{,}26}{14} = 101''88.$$

Ferner hat man

$$f = +\ 1''86, \quad \Sigma t = -\ 22'\ 15''$$

$$f.\frac{\Sigma t}{n.\ 1^\circ} = -\ 0''10$$

also die mittlere mittägliche Höhe der Sonne

$$= 27^\circ\ 31'\ 7''86 + 1'\ 41''88 - 0''10$$
$$= 27.\ 32.\ 49''64$$

welcher nur um zwei Hunderttheile einer Secu
von dem vorigen Resultate abweicht.

§. 479.

Eine sehr einfache Methode die Breite zu
stimmen, die Douwes vorgeschlagen hat, und wel

ch nach ihm benannt ist, besteht darin, dass man e Höhe eines Himmelskörpers zweimal beobachtet, mal sehr nahe bei seiner Culmination, das andere- l entfernt von derselben, und zugleich den Zeit- erschied beider Beobachtungen bemerkt. Um die zu nöthigen Formeln zu erhalten, sey h die von Culmination entfernte Höhe, h' die zunächst am ridian beobachtete, $T + t$, und t die zugehörigen denwinkel, so dass also T die zwischen beiden bachtungen verflossene in Bogen verwandelte Zeit , p die Polhöhe, δ, $\delta + d\delta$ die Declinationen (wir men dieselben als verschieden an, damit die For- n sich zugleich auch für die Beobachtungen der ne anwenden lassen, da man für die Fixsterne $d\delta = 0$ zu setzen braucht), so hat man nach den annten Formeln die beiden Gleichungen

$$\sin h' = \sin p.\ \sin(\delta + d\delta) + \cos p.\ \cos(\delta + d\delta)\ \cos t.$$
$$\sin h = \sin p.\ \sin\delta + \cos p.\ \cos\delta.\ \cos(T + t).$$

Nun ist die Polhöhe beinahe gleich $90 - h' + \delta - d\delta$, da die Höhe h' der im Meridian sehr nahe mmt, und da der Winkel t nur klein ist, so kann an

$$p = 90 - h' + \delta + d\delta - x,$$
$$\cos t = 1 - \frac{tt}{2},$$

tzen, wo x ein so kleiner Winkel ist, dass die hö- rn Potenzen vernachlässigt werden können. Hier- urch wird die erste Gleichung

$$\begin{aligned}\sin h' &= \cos(h' - \delta - d\delta + x).\ \sin(\delta + d\delta)\\ &\quad + \sin(h' - \delta - d\delta + x).\ \cos(\delta + d\delta)\\ &\quad - \tfrac{1}{2}\sin(h' - \delta - d\delta + x)\ \cos(\delta + d\delta).\ t^2\\ &= \sin(h' + x) - \tfrac{1}{2}\sin(h' - \delta).\ \cos\delta.\ t^2\end{aligned}$$

der auch wenn man $\sin(h' + x)$ entwickelt

$$x = \frac{\sin(h' - \delta).\ \cos\delta}{\cos h'}.\ \frac{t^2}{2}$$

Die Gleichung welche $\sin h$ ausdrückt, giebt, in- m man $\cos(T + t)$ entwickelt:

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin p.\ \sin\delta + \cos p.\ \cos\delta.\ \cos T\\ &\quad - \tfrac{1}{2}\cos p.\ \cos\delta.\ \cos T.\ t^2\\ &\quad - \cos p.\ \cos\delta.\ \sin T.\ t\\ &= \cos(p - \delta) - 2\cos p.\ \cos\delta.\ \sin\tfrac{1}{2}T^2\\ &\quad - \tfrac{1}{2}\cos p.\ \cos\delta.\ \cos T.\ t^2\\ &\quad - \cos p.\ \cos\delta.\ \sin T.\ t.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man leicht

$$t = \frac{\cos(p-\delta) - \sin h}{\cos p.\ \cos\delta.\ \sin T} - \tang \tfrac{1}{2} T - \tfrac{1}{2} \cot T.\ t^1.$$

oder wenn man statt p seinen Werth setzt, so wird

$$\cos(p-\delta) = \sin(h' + x - d\delta)$$

$$\cos(p-\delta) - \sin h = 2 \sin \frac{h' - h + x - d\delta}{2} \cdot \cos \frac{h' + h + x - d\delta}{2}$$

folglich

$$t = 2. \frac{\sin \frac{h' - h + x - d\delta}{2} \cdot \cos \frac{h' + h + x - d\delta}{2}}{\sin(h' - \delta + x - d\delta).\ \cos\delta.\ \sin T} - \tang \tfrac{1}{2} T - \tfrac{1}{2}.\ \cot T.\ t^2.$$

§. 480.

Um nun die Rechnung am vortheilhaftesten einzuleiten, vernachlässige man zuerst im ersten Gliede den kleinern Winkel x, da dieser dem Quadrat von t proportional ist, und setze

$$2. \frac{\sin \frac{h - h - d\delta}{2} \cdot \cos \frac{h' + h - d\delta}{2}}{\sin(h' - \delta - d\delta).\ \cos\delta.\ \sin T} = \tang \tfrac{1}{2} N$$

so wird nächstens

$$z = \tang \tfrac{1}{2} N - \tang \tfrac{1}{2} T = \frac{\sin \frac{1}{2}(N-T)}{\cos \frac{1}{2} N.\ \cos \frac{1}{2} T}$$

und hierdurch

$$x = \frac{\sin(h' - \delta).\ \cos\delta}{\cos h'} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Man wird auf diese Weise in den meisten Fällen die Polhöhe

$$p = 90 - h' + \delta + d\delta - x$$

genau genug erhalten. Wollte man aber eine grössere Genauigkeit haben, so braucht man nur die Rechnung zu wiederholen, indem man den gefundenen Werth von x mit berücksichtigt, wobei man aber dann nicht vergessen darf bei der neuen Berechnung von t das weggelassene Glied $\frac{1}{2} \cot T.\ t^2$ mit

uzuziehen. Es ist fast überflüssig zu bemerken, s die beobachteten Höhen erst von der Strahlenchung und Parallaxe befreit werden müssen.

§. 481.

Als Beispiel nehmen wir zwei Beobachtungen die Humboldt in Montserrat am 20. Januar 1799 anstellt hat.

Zeit d. Uhr	doppelte Höhe d. Sirius
$9^h\ 51'\ 46''$	$62°\ 35'\ 19''$
10. 30. 17.	63. 57. 44.

Die Strahlenbrechungen sind 1′ 35″15 und 1′ ″00, also

$$h = 31°\ 16'\ 4''35$$
$$h' = 31.\ 57.\ 19{,}00.$$

Die Zwischenzeit ist $= 0^h\ 38'\ 31''$, die aber we- n der Voreilung der Fixsterne um 6″5 vermehrt rden muss; es wird daher der Winkel

$$T = 9°\ 39'\ 22''5.$$

e Declination des Sirius ist (§. 471.)

$$\delta = -\ 16°\ 26'\ 57''6$$

d die Veränderung $d\delta = 0$. Es wird also

$$\frac{h'-h}{2} = 0°\ 20'\ 37''32$$
$$\frac{h'+h}{2} = 31.\ 36.\ 41{,}67$$
$$h'-\delta = 48.\ 24.\ 16{,}60$$
$$log\ 2 = 0.3010300$$
$$sin\ \tfrac{1}{2}(h'-h) = 7.7780590$$
$$cos\ \tfrac{1}{2}(h'+h) = 9.9302467$$
$$C.\ sin(h'-\delta) = 0.1261847$$
$$C.\ cos\ \delta = 0.0181487$$
$$C.\ sin\ T = 0.7753720$$
$$8.9290411 = tang\ \tfrac{1}{2}N$$
$$\tfrac{1}{2}N = 4°\ 51'\ 15''33$$
$$\tfrac{1}{2}T = 4.\ 49.\ 41{,}25$$
$$\tfrac{1}{2}(N-T) = 0.\ 1.\ 34{,}08$$
$$sin\ \tfrac{1}{2}(N-T) = 6.65906$$
$$C.\ cos\ \tfrac{1}{2}N = 0.00146$$

$$C.\cos\tfrac{1}{2}T = 0.00155$$
$$6.66207 = t.$$
$$\log t^2 = 3.32414$$
$$\sin(h'-\delta) = 9.87382$$
$$\cos\delta = 9.98185$$
$$C.\cos h' = 0.07137$$
$$\log\tfrac{1}{2} = 9.69897$$
$$\log 206265'' = 5.31445$$
$$8.26460 = x = 0''02$$

folglich die Polhöhe $p = 90 - h' + \delta - x$
$= 41° 35' 43''38.$

Es würde bei diesem Beispiel der Mühe nicht werth seyn die Rechnung zu wiederholen, da die Grösse x einen so geringen Werth erhalten hat.

§. 482.

Wir wollen noch ein zweites Beispiel wählen, wobei zwei Beobachtungen von Sonnenhöhen gewählt sind, die v. Humboldt in Valencia am 6. Februar 1799 nahm

Zeit d. Uhr	Höhe d. Sonne
9ᵗ 32′ 34″	23° 3′ 42″5
12. 22. 10.	35. 17. 57,5.

Die Verbesserungen sind

Strahlenbrechung	= — 2′ 15″11;	— 1′ 20″13.
Halbmesser	= — 16. 15,72;	— 16. 15,71.
Parallaxe	= + 00. 8,00;	+ 00. 7,09.

und hierdurch ergiebt sich

$$h = 22° 45' 19''67$$
$$h' = 35. 00. 28,75.$$

Die Declination der Sonne in Berlin am 6. Febr. ist $= -15° 31' 36''$, und die stündliche Annäherung derselben gegen den Nordpol $= 46''46$. Nimmt man nun Valencia in Zeit 53′ 1″ westlich von Berlin, so ergiebt sich die Declination der Sonne bei der Culmination derselben in Valencia, die man zur Zeit der Beobachtung der grössern Höhe, die nahe am Meridian gemacht ist, annehmen kann

$$\delta + d\delta = -15° 30' 54''70$$
$$\delta = -15. 33. 06,89$$

die letztere Declination für die Zeit der ersten achtung gilt. Verwandelt man die Zwischenzeit Beobachtungen $2^h\ 49'\ 36''$ in Bogen, so kommt, ler Gang der Uhr mit der Bewegung der Sonne einstimmt,

$$T = 42°\ 24'\ 30''.$$

Ferner hat man noch

$$\frac{h' - h - d\delta}{2} = 6°\ 6'\ 58''44$$

$$\frac{h' + h - d\delta}{2} = 28.\ 25.\ 48,11$$

$$h' - \delta - d\delta = 50.\ 31.\ 23,45$$

hieraus erhält man nach den Formeln (§. 480.)

$$\tfrac{1}{2}N = 20°\ 24'\ 29''80$$
$$\tfrac{1}{2}T = 21.\ 12.\ 15,00$$

$$\tfrac{1}{2}(N - T) = -\ 0.\ 47.\ 45,20$$
$$t = -\ 3276''2 = -\ 54'\ 36''2.$$

Dieser negative Werth des Stundenwinkels zeigt dass die zweite Beobachtung nahe am Meridian on nach der Culmination der Sonne gemacht ist. lucirt man sie auf Zeit, so erhält man $3'\ 38''4$, ches von der Zeit der zweiten Beobachtung abge-en, die Culmination der Sonne um

$$12^h\ 18'\ 31''6$$

bt. Dies weicht von der genauern, aus mehreren obachtungen correspondirender Sonnenhöhen ge-lossenen $12^h\ 18'\ 27''$, nur wenig ab.

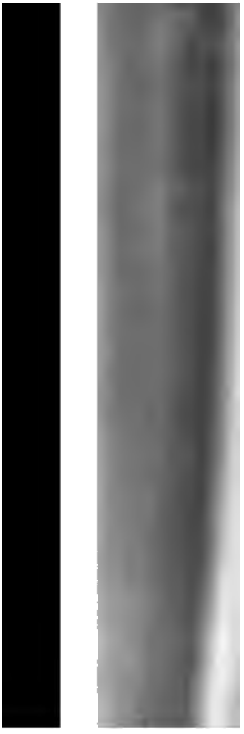
Endlich findet sich noch der Werth von $x = 23''64$, dass die Polhöhe

$$p = 39°\ 28'\ 13''91$$

funden wird. Will man die Rechnung noch einmal it Einführung des Werthes von x wiederholen, so nss man zuerst zu den Werthen von δ und $\delta + d\delta$, '90 hinzufügen, weil die Beobachtung nahe am Me-dian erst $3'\ 38''$ nach der Culmination gemacht ist, id die vorigen Declinationen für die Culminations-it der Sonne gelten. Man hat dann

$$\delta + d\delta = -\ 15°\ 30'\ 51''80$$
$$\delta = -\ 15.\ 33.\ 4,00$$

$$\frac{h' - h + x - d\delta}{2} = 6.\ 7.\ 10,26$$



$$\frac{\sin h'' - \sin h}{\sin h'' - \sin h'} \cdot \frac{1 - \cos T}{1 - \cos T'} = \frac{1 + \tan t.\ \tan \frac{1}{2} T'}{1 + \tan t.\ \tan \frac{1}{2} T}$$

er vor dem Gleichheitszeichen stehende Theil
ich auch so ausdrücken:

$$\frac{\sin \frac{h'' - h}{2} \cdot \cos \frac{h'' + h}{2}}{\sin \frac{h'' - h'}{2} \cdot \cos \frac{h'' + h'}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} T^2}{\sin \frac{1}{2} T'^2}$$

nter dieser Form kann er leicht durch Loga-
en berechnet werden, und wir setzen ihn
$ng(45 + \lambda)$, so dass also λ ein bekannter Win-
wird. Nun ist aber

$$\tan g(45 + \lambda) = \frac{1 + \tan g \lambda}{1 - \tan g \lambda}$$

auch

$$\frac{1 + \tan g \lambda}{1 - \tan g \lambda} = \frac{1 + \tan t.\ \tan \frac{1}{2} T'}{1 + \tan t.\ \tan \frac{1}{2} T}$$

hieraus ergiebt sich leicht

$$ng\ t = \frac{2 \tan g \lambda}{(tg \frac{1}{2} T' - tg \frac{1}{2} T) - tg \lambda (tg \frac{1}{2} T' + tg \frac{1}{2} T)}$$

$$= \frac{\frac{2 \tan g \lambda .\ \cos \frac{1}{2} T' .\ \cos \frac{1}{2} T}{\sin \frac{1}{2} (T' - T)}}{1 - \tan g \lambda \frac{\sin \frac{1}{2} (T' + T)}{\sin \frac{1}{2} (T' - T)}}.$$

Man setze nun noch

$$\tan g \lambda \frac{\sin \frac{1}{2} (T' + T)}{\sin \frac{1}{2} (T - T)} = \tan g \theta$$

kommt

$$ng\ t = \frac{2 \cos \frac{1}{2} T' .\ \cos \frac{1}{2} T}{\sin \frac{1}{2} (T' + T)} \cdot \frac{\tan g \theta}{1 - \tan g \theta}$$

$$= \frac{2 .\ \cos \frac{1}{2} T' .\ \cos \frac{1}{2} T .\ \sin \theta .\ \sin 45}{\sin \frac{1}{2} (T' + T) .\ \sin (45 - \theta)}$$

man kann aus irgend einer der drei Fundamen-
leichungen mit der bekannten Declination δ des
ns, die Polhöhe p berechnen. Dies geschieht wi

und hieraus erhält man

$$\sin(p + N) = \frac{\sin h. \cos N}{\sin \delta}$$

welches $p + N$ giebt, und da N bekannt ist det sich auch daraus die Polhöhe p.

§. 484.

Sind alle drei Höhen sehr nahe am Me nommen, so kann man die Rechnung folgen abkürzen. Nach §. 477. wenn t in Zeitmi gedrückt ist, f die Veränderung der Decl einer Minute und a die Zunahme der Höh Minute ausdrückt, ist die mittägliche Höhe

$$H = h'' + at^2 + ft$$
$$H = h' + a(t + T)^2 + f(t + T)$$
$$H = h + a(t + T')^2 + f(t + T').$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$0 = h'' - h' - aT(2t + T) - fT$$
$$0 = h'' - h - aT'(2t + T') - fT'$$

folglich auch

$$a(2t + T) + f = \frac{h'' - h'}{T}$$

$$a(2t + T') + f = \frac{h'' - h}{T'}.$$

$$2t = \frac{h'' - h}{aT'} - \frac{f}{a} - T'$$

auch t, und man kann H nach den drei ersten ichungen berechnen.

§. 485.

Nehmen wir z. B. aus §. 477. drei Beobachtun- der Sonne

	wahre Höhe	Zeit
h	$= 27^\circ\ 29'\ 54''46$,	$11^h\ 53'\ 47''$
h'	$= 27.\ 30.\ 54,54$,	$11.\ 55.\ 38.$
h''	$= 27.\ 31.\ 52,21$,	$11.\ 58.\ 00.$

haben wir

$h'' - h$	$= 1'\ 57''75$	$= 1'9625$
$h'' - h'$	$= 0.\ 57,67$	$= 0,9612$
T	$= 2.\ 22''$	$= 2,3667$
T'	$= 4.\ 13''$	$= 4,2167$
f	$= + 0''466$	$= + 0,007766$
$T' - T$	$= 1'8500.$	

Hieraus ergiebt sich nun

$$a = 0,03205$$
$$t = + 5'463$$

d man erhält

$$H = 27^\circ\ 32'\ 49''04.$$

§. 486.

Die bisher angegebenen Methoden die geographi- e Breite eines Ortes zu finden, setzen immer die clination des beobachteten Gestirns als bekannt raus, und man kann immer mit Recht diese An- hme machen, da durch die Bemühungen der Astro- nen die Declinationen so genau bestimmt sind, dass noch etwa bei denselben vorkommenden Fehler enfalls viel geringer sind, als diejenigen Fehler, lche ein Beobachter bei der Messung der Höhen ch solche Instrumente, die man mit Leichtigkeit einem Orte zum andern bringt, begehen kann. festen Beobachtungsplätzen, auf Sternwarten, muss n freilich die Polhöhe unabhängig von der Decli- ion des Sterns finden können, weil die an solchen

Obertum angestellten Beobachtungen dazu dienen sollen, die Lage der Himmelskörper genau zu bestimmen, und man sich daher in einem logischen Kreise befinden würde, wenn man die Polhöhe von den Declinationen abhängig machte. Da die zu diesem Zweck angestellten Beobachtungen grosse und genaue Instrumente erfordern, und die verschiedenen dabei zu beobachtenden Vorsichtsmaassregeln und Beobachtungsmethoden in die eigentliche practische Astronomie gehören, so erwähnen wir nur ganz kurz, dass die beste Art die Polhöhe zu finden, darin besteht, dass man die grösste und kleinste Höhe eines Circumpolarsterns eines solchen, dessen ganzer Parallelkreis über dem Horizont liegt) beobachtet, und nachdem in demselben die gehörigen Verbesserungen wegen der Strahlenbrechung, Aberration, Nutation und Präcession angebracht sind, aus den beiden Höhen das arithmetische Mittel nimmt. Man muss freilich hierbei wohl beachten, dass der Stern bei seinem unteren Durchgange durch den Meridian dem Horizont nicht zu nahe kommt, weil sonst die Unsicherheit der Strahlenbrechung in diesen Gegenden verhindert, dass man die wegen derselben an der beobachteten Höhe anzubringende Correction nicht genau genug findet, und hierdurch nothwendig in der Bestimmung der Polhöhe einen Fehler begehen wird. Diese Methode wird daher an solchen Beobachtungs-

§. 487.

Die Bestimmung der geographischen Länge eines
s ist viel mehr Schwierigkeiten unterworfen, als
der Breite desselben, und man hat erst in neuern
en die Mittel aufgefunden, diese Coordinate der
e eines Ortes genauer zu bestimmen. Die ein-
ste, bequemste und zugleich wohl auch die ge-
ste Art der Längenbestimmung bilden die Chro-
eter, tragbare Uhren oder Seeuhren genannt
detems, Timekeeper) dar, deren Gang so gleich-
ig ist, dass man sich lange Zeit hindurch auf
Angabe der Uhr verlassen kann, ehe es etwa
ig wird, der grössern Sicherheit wegen dieselbe
er mit dem Himmel zu vergleichen. Man kann
rken, dass man diese Uhren gewöhnlich so ge-
als möglich nach mittlerer Zeit gehen lässt, und
nach Sternzeit, wie meistentheils bei den fest-
nden Pendeluhren geschieht. Die Längenbestim-
g durch Uhren geschieht folgendermassen: man
rsuche zuerst den Gang der Uhr genau eine Zeit-
hindurch an einem und demselben Orte, so dass
sich im Stande befindet, mit hinreichender Si-
heit den Stand der Uhr an diesem Orte bei ir-
l einer an einem andern Orte zu beobachtenden
melserscheinung z. B. der Culmination der Sonne,
ier zu bestimmen. Diese berechnete Zeit sey T.
bachtet man nun, dass an einem andern Orte die
nination der Sonne zur Zeit t nach der Uhr ein-
t, so ist der Meridianunterschied oder die Länge
elben in Zeit ausgedrückt $= T - t$, und die Län-
wird östlich, wenn $T - t$ positiv, westlich, wenn
t negativ ist.

§. 488.

Um ein Beispiel dieser Art von Längenbestimmung
haben, wollen wir uns folgender Angaben bedie-
. In Madrid beobachtete v. Humboldt die
des mittlern Mittags nach seinem Chronometer
8. May 1799

$= 11^h\ 58'\ 1''6$

derselbe blieb täglich $4''4$ zurück, wenn er

Ruhe war oder auf der See sich befand. Bis zur Ankunft in la Corogne am 21. May musste man für die tägliche Verzögerung 5″4 rechnen. Am 16. July kam v. Humboldt in Cumana an, und man erhält daher für die Uhrzeit des Mittags in Madrid für den

16. July		$11^h\ 58'\ 1''6$
13.(−5″4)	=	1. 10,2
56.(−4,4)	=	4. 6,4
		$11^h\ 52'\ 45''0.$

In Cumana selbst zeigte sich, dass der Chronometer täglich 7″ zurückblieb. Dies giebt bis zum 28. July 5 Uhr Nachmittags der Zeit in Madrid, wo v. Humboldt das erstemal in Cumana Sonnenhöhen nahm

$$T = 11^h\ 52'\ 45''0 - 12\tfrac{1}{2}.\ 7''$$
$$= 11.\ 51.\ 19,6.$$

Die Beobachtung selbst gab den mittlern Mittag nach der Uhr $t = 3^h\ 53'\ 14''3$

also die Meridiandifferenz zwischen Cumana und Madrid (indem man noch zu t 12 Stunden addirt)

$$T - t = 11^h\ 51'\ 19''6 - 15^h\ 53'\ 14''3$$
$$= -\ 4.\ 1.\ 54,7$$

also westliche Länge von Cumana, wenn Madrid als erster Meridian genommen wird

$$= 60°\ 28'\ 40''5$$

indem man obige Zeit durch die Multiplication mit 15 auf Bogen reducirt.

§. 489.

Vermittelst der Sonnenbeobachtungen fand sich der Gang des Chronometer in Cumana:

Juli	28.	5^h Nachm.	$3^h\ 53'\ 14''3$
August	6.	7. Vorm.	3. 52. 20,5
—	7.	0.	3. 52. 4,7
—	24.	7.	3. 50. 16,0
—	25.	7.	3. 50. 8,0
—	26.	6.	3. 49. 53,0.

Um hieraus die Länge von Cumana so genau als möglich abzuleiten, wollen wir annehmen, am 28. July 0^h sey das Voreilen der Uhr

$$= 3^h\ 53'\ 15'' + \alpha$$

nd die tägliche Verzögerung $7'' + b$ gewesen, so erhält man das Voreilen der Uhr zu jeder Zeit t nach m 28. July 0^h, durch die Gleichung

$$3^h\ 53'\ 15'' - 7''\,t + a - bt$$

nd man erhält zur Bestimmung der beiden unbeannten Grössen a und b folgende sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} + 0''8 &= a - b.\ 0''2; \\ + 7,8 &= a - b.\ 8,8; \\ - 0,3 &= a - b.\ 10,0; \\ + 8,6 &= a - b.\ 26,8; \\ + 7,6 &= a - b.\ 27,8; \\ + 0,9 &= a - b.\ 28,9; \end{aligned}$$

ie man nach der Methode der kleinsten Quadrate uflösen muss. Man erhält dann auf die schon oft ngewendete Art

$$\begin{aligned} + 25''4 &= 6a - b.\ 102,5 \\ - 533,6 &= -102,5\,a + b.\ 2503,6 \end{aligned}$$

nd hieraus ergiebt sich

$$a = + 1''95, \qquad b = - 0''134.$$

Man darf also die tägliche Verzögerung in Cunana nur zu $7'' - 0''134 = 6''866$ annehmen, und nan hat aus den Beobachtungen vom 28. July 5^h Nachmittags die Zeit des mittlern Mittags nach der Uhr $= 3^h\ 53'\ 15'' + 1''95 - 0{,}2\ (6''87)$

$= 3.\ 53.\ 15''58.$

Die Zeit in Madrid würde seyn (§. 488.)

$11^h\ 52'\ 45''0 - 12\frac{1}{5}\ (6''866)$

$= 11.\ 51.\ 21''24.$

folglich der Zeitunterschied zwischen Cumana und Madrid $= 4^h\ 1'\ 45''34.$

§. 490.

Die Mondfinsternisse sind schon sehr früh zur Bestimmung des Längenunterschiedes angewendet worden, da dieselben ohne weitere Rechnung die Meridiandifferenz zweier Orte geben, an welchen sie beobachtet sind. Da nämlich der Mond durch den Schatten der Erde, in welchen er zuweilen ganz oder zum Theil tritt, wenn er zur Zeit des vollen Lichts sich nahe an der Ecliptik befindet, wirklich sein Licht verliert, so wird der Anfang sowohl als das Ende der Finsterniss, so wie auch jede einzelne Phas

Eintritte	Austritte
33′ 39″	32′ 44″
ittel 33. 59,6	33. 43.
33. 22,5	Mittel 33. 22,5
33. 41,0.	

a die Uhr in Gotha mehr Zeit zeigte als in , so ging die Sonne in Gotha früher durch den ian, folglich liegt dieser Ort östlich von Paris. andelt man die Zeit in Bogen, so erhält man leridianunterschied zwischen Gotha und Paris

$= 8° 25′ 15″$

la die Länge von Paris zu 20° angenommen so ergiebt sich daraus die östliche Länge von

$= 28° 25′ 15″$.

§. 491.

Man sieht aus diesem Beispiel wie höchst einfach echnung ausfällt, wenn man von zwei Oertern pondirende Beobachtungen der Finsterniss hat, ie Länge des einen schon bekannt ist. Findet ıber nicht statt, so muss man die Finsterniss nen bestimmten Ort aus den Sonnentafeln und tafeln berechnen *), und diese berechneten Erungen als beobachtet ansehen, worauf dann die e Bestimmung des Meridianunterschiedes auf n vorigen Paragraph angegebene Weise ausgewird. Wir wollen daher in den folgenden Paıhen kurz zeigen, wie eine Mondfinsterniss sich ınen lässt.

§. 492.

s sey (fig. 12.) in S der Mittelpunkt der Sonne, der Erde, und die um dieselben mit den Halbrn SA, TB beschriebenen Kreise stellen die ıschnitte der Sonne und Erde vor; man verbine Mittelpunkte S und T durch die Linie ST,

1 hat Sonnentafeln von Delambre, v. Zach und Carlini; Mondtafeln Büry, Burkhardt und Damoiseau.

ziehe die Berührungslinie AB an beide Kreise, und verlängere diese beiden Linien bis sie sich hinter der Erde in C schneiden. Lässt man dann das Dreieck ASC sich um die Linie SC als Axe drehen, so entsteht ein Kegel, dessen hinter der Erde liegender Theil BCD den Raum angiebt, in welchen die Sonne keine Strahlen werfen kann; man nennt ihn daher den Schattenkegel oder blos Schatten der Erde, und jeder in denselben tretende Körper, der ausserhalb desselben von der Sonne erleuchtet wurde, wird sein Licht verlieren und dunkel erscheinen. Da nun der Erdschatten sich weit über die Entfernung des Mondes von der Erde hinaus erstreckt, so ist es möglich, dass dieser Trabant in den Schatten tritt und sein Licht verliert. Es sey NL ein kleiner Theil der Mondsbahn innerhalb des Schattens, so wird NL den Halbmesser des Schattens in der Gegend, wo die Mondsbahn den Schatten durchschneidet, vorstellen, und wir wollen aufsuchen, unter welchem Winkel der Halbmesser des Schattens, vom Mittelpunkte der Erde ausgesehen, erscheint, d. h. wie gross der scheinbare Halbmesser sey. Man hat (fig. 12.)

$$\frac{SA - TB}{ST} = \sin SCB$$

$$TC = \frac{TB}{\sin SCB}; \quad LC = TC - TL$$

$$NL = LC. \tang SCB$$
$$= TC. \tang SCB - TL. \tang SCB$$
$$= \frac{TB}{\cos SCB} - TL. \tang SCB$$

$$\tang NTL = \frac{NL}{TL} = \frac{TB}{TL}. \frac{1}{\cos SCB} - \tang SCB.$$

wo NTL der verlangte scheinbare Halbmesser des Kreises des Erdschattens in der Gegend ist, wo der Mond den Schattenkegel durchschneidet. Nun ist aber $\frac{SA}{ST}$ gleich dem Sinus des scheinbaren Halbmessers der Sonne aus der Erde gesehen, $\frac{TB}{ST}$ gleich dem Sinus des scheinbaren Halbmessers der Erde aus

Sonne gesehen, oder gleich dem Sinus der Horitalparallaxe der Sonne; setzt man daher
scheinbaren Halbmesser der $\odot = R$,
Horizontalparallaxe der $\odot = P$,
hat man statt der obern Gleichung

$$\frac{SA}{ST} = \frac{TB}{ST} = \sin SCB, \text{ diese:}$$

$$\sin R - \sin P = \sin SCB$$

er da die Grössen R, P sehr klein sind, so kann an statt der Sinus die Bogen selbst setzen, und es mmt:

$$R - P = SCB$$

Ferner ist $\frac{TB}{TL}$ oder $\frac{TB}{TN}$, da TL und TN nur sehr enig von einander verschieden sind, gleich dem Sius des scheinbaren Halbmessers der Erde aus dem onde gesehen (weil in N oder L der Mond sich finden soll) d. h. gleich dem Sinus der Horizontalarallaxe des Mondes. Setzt man also
die Horizontalparallaxe des Mondes $= \varpi$,
den scheinbaren Halbmesser des Schattens $= \rho$,
o giebt die vorhin gefundene Gleichung

$$tang\, NTL = \frac{TB}{TL} \cdot \frac{1}{cos\, SCB} - tang\, SCB$$

liese andere:

$$\rho = \varpi + P - R$$

indem man statt der Tangenten die Winkel, und statt des Cosinus die Einheit setzt; folglich ist der Halbmesser des Schattens gleich der Summe der Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes, weniger dem Halbmesser der Sonne.

§. 493.

Dieses aus der Theorie abgeleitete Resultat stimmt aber nicht genau mit den Beobachtungen überein, indem diese zeigen, dass der Halbmesser des Schattens immer etwas grösser wird als die Rechnung denselben giebt. Dies rührt wahrscheinlich von der die Erde umgebenden Atmosphäre her, deren dichterer Theil das Licht sehr verschluckt. Mayer giebt da-

[illegible] man solle den vorher gefundenen Werth von ν noch um den sechzigsten Theil der Summe der Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne vermehren, so dass also

$$\nu = \frac{[illegible]}{[illegible]}(P + \pi) - R$$

wird, welches nämlich mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Ausserdem haben wir angenommen, dass der Durchschnitt der Erde ein Kreis sey; dies setzt eine kugelförmige Gestalt der Erde voraus, die sie freilich nicht besitzt, allein die Abweichung ihrer Form von der Kugelgestalt ist so gering, dass die Ungenauigkeit der Beobachtungen der Mondfinsternisse diesen Fehler bei Weiten übertrifft. Es ist nämlich sehr schwierig den Anfang oder das Ende, oder überhaupt eine Phase der Mondfinsternisse zu beobachten, da der Erdschatten nicht scharf eintritt, sondern ganz verwaschen erscheint. Dies erklärt sich aus der Natur der Sache sehr leicht. Denn zieht man eine Berührungslinie [illegible] Fig. [illegible], die die kreisförmigen Durchschnitte der Sonne und des Mondes auf entgegengesetzten Seiten berührt, und verlängert sie willkührlich nach G, so entsteht durch die Umdrehung der Figur GFC um die Axe [illegible] ein Raum, in welchem das Licht der Sonne nur zum Theil einfallen kann, so dass ein von [illegible] nach [illegible] zu gebender Körper sein Licht allmählig

§. 494.

Man berechne nun aus den Tafeln des Sonnenlaufs und des Mondlaufs die Oerter der Sonne und des Mondes für eine Zeit T, die der Opposition des Mondes (wo die Längen der Sonne und des Mondes um 180° verschieden sind) sehr nahe liegt, so wie auch die stündlichen Bewegungen beider Himmelskörper, ihre Parallaxen und Halbmesser. Wir setzen nun

Länge der Sonne + 180° = $\odot$,
Länge des Mondes = $\mathbb{C}$,
Breite des Mondes = 6,
stündliche Bewegung der Sonne = $d\odot$,
stündl. Bew. d. Mondes in Länge = $d\mathbb{C}$,
— — — — — Breite = $d6$,
Horizontalparallaxe des Mondes = ϖ,
—— der Sonne = P,
scheinbarer Halbmesser des Mondes = r,
— — — der Sonne = R.

Es sey (fig. 13.) EK die Ecliptik, L der Ort des Mondes zur Zeit T, und die Länge werde von E nach K zu gezählt, so ist EB die Länge des Mondes, LB die Breite desselben; C sey der dem Mittelpunkt der Sonne gegenüberliegende Punkt des Himmels, welcher derjenige ist, in welchem die Axe des Schattenkegels verlängert die Himmelskugel trifft, so hat man EC = der Länge der Sonne + 180° = $\odot$. Zur Zeit $T + t$, wo t in Stunden ausgedrückt ist, sey der Ort der Spitze des Schattenkegels in C', der des Mondes in L', so hat man, da der Schatten mit derselben Geschwindigkeit als die Sonne forschreitet

$$EC' = \odot + t.\, d\odot$$
$$EB' = \mathbb{C} + t.\, d\mathbb{C}$$
$$B'L' = 6 + t.\, d6.$$

Die Grösse 6 ist positiv bei einer nördlichen, negativ bei einer südlichen Breite; $d6$ ist positiv, wenn sich der Mond dem Nordpol der Ecliptik nähert, negativ, wenn er sich von selbigem entfernt. Um C' sey ein Kreis mit dem Halbmesser $\rho = \frac{61}{60}(P+\varpi) - R$ beschrieben, so stellt derselbe die Grösse des Schattens in der Gegend der Mondsbahn vor; eben so be-

[illegible] Kreis mit dem scheinba[illegible] [illegible] = [illegible]. Der Abstand der [illegible] [illegible] und des Schattens L', C' erg[illegible] [illegible] rechtwinklichten Dreieck $C'B$ [illegible]

$$[illegible] = [illegible] + BC^2;$$

[illegible] der Mittelpunkte al[illegible] [illegible]

$$[illegible] = [illegible] - [illegible] - [illegible] (d☾ - d☉)]^2$$
$$[illegible]$$

[illegible] man das Dreieck $L'B'C'$ als [illegible] und LC durch die Forme[illegible]

$$[illegible] = \cos L'B' \cdot \cos B'C'$$

[illegible] wegen der Kleinheit dieser Bogen [illegible] Dreieck betrachten, [illegible] der sphärischen Formel ergiebt, w[illegible] [illegible] Entwickelungen setzt, [illegible] die das Quadrat übersteigen, verna[illegible]

$$[illegible] - [illegible] = [illegible] \qquad d☾ - d☉ = d\lambda$$

wo [illegible] immer positiv wird da die Bewegung [illegible] Mondes in der Länge bedeutend grösser als die d[illegible] Sonne ist. Man nennt die durch $d\lambda$ bezeichne[illegible] Grösse auch die relative stündliche Bewegung d[illegible] Mondes, da sie seine Geschwindigkeit ausdrück[illegible] wenn man den Schatten als ruhend betrachtet. Durc[illegible] diese Bezeichnungen wird also

[illegible]

$$t' = \frac{\lambda}{d\lambda} \cdot \frac{1 - tang\, i.\, tang\, \mu}{1 + tang\, i^2}$$
$$= \frac{\lambda}{d\lambda} \cdot \frac{cos(i+\mu).\, cos\, i}{cos\, \mu}.$$

Entwickelt man die Formel

$$AA = (\lambda - td\lambda)^2 + (6 + td6)^2$$

so erhält man

$$AA = \lambda\lambda + 66 + t^2 (d\lambda^2 + d6^2)$$
$$- 2t\,(\lambda d\lambda - 6d6)$$

oder wenn man durch $d\lambda^2 + d6^2$ dividirt

$$\frac{AA}{d\lambda^2 + d6^2} - \frac{\lambda\lambda + 66}{d\lambda^2 + d6^2} = t^2 - 2t. \frac{\lambda d\lambda - 6d6}{d\lambda^2 + d6^2}$$
$$= t^2 - 2tt'.$$

Bezeichnet man den zur Zeit t' statt findenden kleinsten Abstand durch A', so wird ebenfalls

$$\frac{A'A'}{d\lambda^2 + d6^2} - \frac{\lambda\lambda + 66}{d\lambda^2 + d6^2} = t'^2 - 2t'^2$$

folglich, wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht

$$\frac{AA - A'A'}{d\lambda^2 + d6^2} = t^2 - 2tt' + t'^2$$

oder wenn man statt $d\lambda^2 + d6^2$, $\left(\frac{d\lambda}{cos\, i}\right)^2$ schreibt, und dann auf beiden Seiten die Wurzel auszieht, so kommt

$$t = t' \pm \frac{cos\, i}{d\lambda} \cdot \sqrt{(A - A')\,(A + A')},$$

aus welcher Formel man für jeden gegebenen Abstand A sehr leicht die zugehörige Zeit t findet, sobald man t' und A' berechnet hat. Um den kleinsten Abstand A' auf die einfachste Art darzustellen, setze man in der Gleichung

$$A'A' - \lambda\lambda - 66 = -t'^2 (d\lambda^2 + d6^2)$$

statt 6, $d6$, t' ihre Werthe durch i, μ, λ, $d\lambda$ ausgedrückt, so wird

$$\lambda\lambda + 66 = \frac{\lambda\lambda}{cos\, \mu^2}$$

$$t'^2 (d\lambda^2 + d6^2) = \lambda\lambda. \frac{cos(i+\mu)^2}{cos\, \mu^2}$$

und hierdurch $A' = \pm \frac{\lambda . \sin(i + \mu)}{\cos \mu}$.

Der Anfang der Finsterniss so wie das Ende derselben, finden dann statt, wenn der Abstand der Mittelpunkte der Summe der Halbmesser des Schattens und des Mondes gleich wird, also wenn

$$A = \varrho + r$$

folglich hat man

Zeit des Anfangs der Finsterniss

$$= t' - \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\varrho + r + A')\ (\varrho + r - A')}.$$

Zeit des Endes der Finsterniss

$$= t' + \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\varrho + r + A')\ (\varrho + r - A')}.$$

Für den Anfang und das Ende der totalen Finsterniss, wo der Mond völlig in den Erdschatten eingetreten ist, ist der Abstand der beiden Mittelpunkte der Differenz der Halbmesser des Schattens und des Monds gleich, also $A = \rho - r$, und daher wird

Zeit des Anfangs der totalen Finsterniss

$$= t' - \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\rho - r + A')\ (\rho - r - A')}$$

Zeit des Endes der totalen Finsterniss

$$= t' + \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\rho - r + A')\ (\rho - r - A')}.$$

Rücksichtlich der Winkel i und μ kann man bemerken, dass i entweder positiv oder negativ, aber immer kleiner als 90° genommen werden muss, jenachdem $d\delta$ positiv oder negativ wird. Für den Winkel μ gelten folgende Regeln:

$+ \delta$,	$+ \lambda$,	$\mu =$ 0° bis 90°
$+ \delta$,	$- \lambda$,	$\mu =$ 90° bis 180°
$- \delta$,	$- \lambda$,	$\mu =$ 180° bis 270°
$- \delta$,	$+ \lambda$,	$\mu =$ 270° bis 360°

wodurch alle Fälle erschöpft sind.

Tritt der Mond nicht ganz in den Schatten, so ist die Finsterniss partiell; die Zeit der grössten Verfinsterung wird durch $T + t'$ angegeben, und die Grösse des verfinsterten Theils durch $A' + \rho - r$. Gewöhnlich findet man die Verfinsterung in Zollen ausgedrückt, wobei der Durchmesser der ganzen

Mondscheibe in zwölf Zoll getheilt wird, und man erhält leicht die Angabe der Zolle

$$= \frac{6(A' + r - \rho)}{r}.$$

§. 495.

Wir wollen als Rechnungsbeispiel die Mondfinsterniss nehmen, welche am 13. September 1829 des Morgens einfällt. Nimmt man hierbei für Paris

T = 1829. September 12. 18^h 0′ 0″,

so finden sich folgende Elemente der Finsterniss

$\odot$ =	350° 7′ 46″3		
$\mathbb{C}$ =	349. 44. 27,9		
δ = +	0. 48. 38,0	= +	2918″
$d\odot$ = +	2. 26,2		
$d\mathbb{C}$ = +	37. 57,4		
$d\mathbb{C} - d\odot = d\lambda$ =	35. 31,2	=	2131″2
$d\delta$ = −	3. 19,0	= −	199″
$\lambda = \odot - \mathbb{C}$ = +	23. 18,4	= +	1398″4
ϖ =	61. 24″		
r =	16. 44		
R' =	15. 56		
P =	0. 08″6.		

Vermittelst der Formeln

$$\rho = \frac{61}{60}(P + \varpi) - R$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = tang\, i, \qquad \frac{\delta}{\lambda} = tang\, \mu,$$

ergiebt sich nun

ρ =	46′ 38″1
i = −	5° 20. 4″
μ = +	64. 23. 40.
$i + \mu$ = +	59. 3. 36.

Ferner erhält man aus den Gleichungen

$$t' = \frac{\lambda}{d\lambda} \cdot \frac{cos(i + \mu).\, cos\, i}{cos\, \mu}$$

$$A' = \frac{\lambda.\, sin(i + \mu)}{cos\, \mu}$$

A' =	2775″3	= 46′ 15″3
t' = +	2798″	= + 46. 38″

folglich die Zeit des kleinsten Abstandes der beiden Mittelpunkte

$$= T + t' = 1829.\ \text{Septbr. } 12.\ 18^h\ 46'\ 38''.$$

Die Grösse des verfinsterten Theils wird $= A' + r - \rho = 17'\ 7'' = 6{,}1$ Zoll. Für den Anfang und das Ende der Finsterniss hat man

$$A = 63'\ 22'' = 3802''$$

und die Formel $\pm \frac{\cos i}{d\lambda} \sqrt{(A - A')\ (A + A')}$ giebt $\pm 4370'' = \pm 72'\ 50''$, so dass man folgende Zeiten erhält

Anfang der Finsterniss

$$= T + t' - 72'\ 50'' = 17^h\ 33'\ 38$$

Ende der Finsterniss

$$= T + t' + 72'\ 50'' = 19^h\ 59'\ 28$$

Die Finsterniss findet also in Paris am 13. Sept. des Morgens von halb sechs Uhr bis um acht Uhr statt; sie ist aber grösstentheils nicht sichtbar, da der Mond bald nach dem Anfange der Verfinsterung untergeht.

§. 496.

Anstatt den Eintritt und Austritt der Mondsflecken zu beobachten, deren Zeitpunkte sich nur durch sehr langweilige Rechnungen bestimmen lassen würden, wenn man den Meridianunterschied zweier Oerter vermittelst derselben finden wollte, und keine correspondirenden Beobachtungen wie §. 490. gemacht worden wären, pflegt man die Sehne PQ des verfinsterten Theils zu messen, und die beobachteten Zeitpunkte mit denjenigen zu vergleichen, die man für dieselbe Grösse der Sehne an einem bestimmten Orte von bekannter Länge durch Rechnung gefunden hat. Man setze $PQ = 2s$, so wird

$$\sin QL'N = \frac{s}{LQ'} = \frac{s}{r}$$

$$\sin QC'N = \frac{s}{QC'} = \frac{s}{\rho}$$

$$L'C'^2 = L'Q^2 + C'Q^2 \pm 2.\, L'Q.\, C'Q.\, \cos L'QC$$

oder auch, wenn man die frühern Bezeichnungen einführt:

$$AA = rr + \rho\rho \pm 2r\rho \cos L'QC.$$

Nun ist aber

$$\cos L'QC = \cos(QL'N - QC'N)$$
$$= \cos QL'N. \cos QC'N + \sin QL'N. \sin QC'N$$
$$= \frac{\sqrt{rr - ss}. \sqrt{\rho\rho - ss} + ss}{r. \rho}$$

folglich wenn man diesen Werth in vorige Gleichung einführt

$$AA = (\rho\rho - ss) + (rr - ss) \pm 2\sqrt{(\rho\rho - ss)(rr - ss)}$$

und wenn man die Wurzel auszieht

$$A = \sqrt{\rho\rho - ss} \pm \sqrt{rr - ss}.$$

Man muss das obere Zeichen nehmen, so lange beim Eintritt die Sehnen zunehmen und beim Austritt abnehmen; das untere Zeichen im entgegengesetzten Falle.

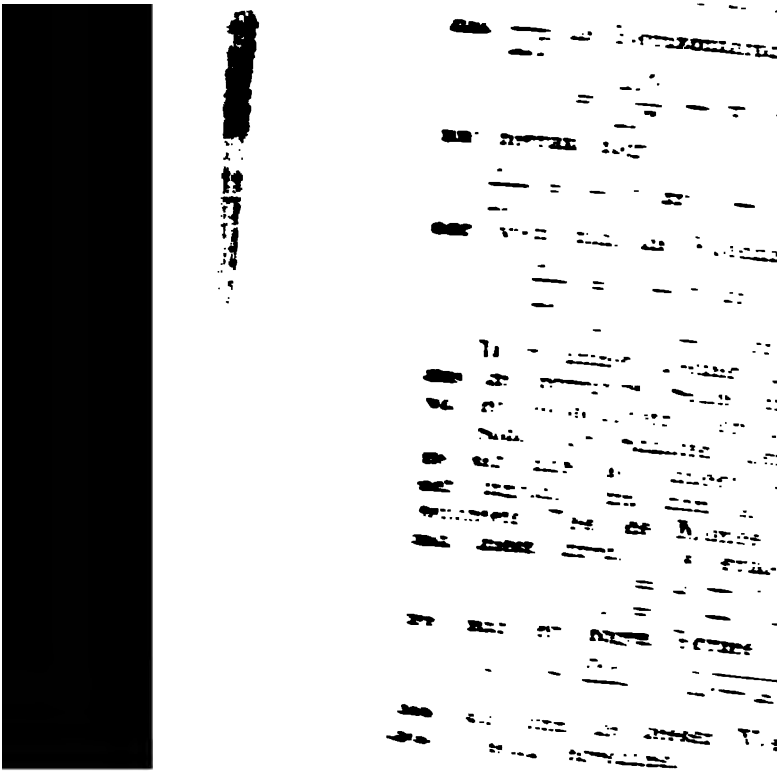
Hat man durch diese Formel den Abstand der Mittelpunkte A für diese Länge der Sehne gefunden, so giebt die Gleichung (§. 494.)

$$t = t' \pm \frac{\cos i}{d\lambda}. \sqrt{(A - A')(A + A')}$$

die zugehörige Zeit t. Das obere Zeichen gilt für den Austritt, das untere für den Eintritt des Mondes in den Schatten.

Es ist jedoch zu bemerken, dass der beobachtete Werth von s nicht direct angewendet werden darf, sondern dass man ihn erst auf denjenigen Werth reduciren muss, welchen die halbe Sehne dann haben würde, wenn sich der Beobachter im Mittelpunkte der Erde befände. Es sey zu diesem Ende T der Mittelpunkt der Erde (fig. 14.), in L der Mond, in O der Beobachter, so verhalten sich die Längen der Sehnen von T und von O aus gesehen, umgekehrt wie die Entfernungen LT, LO. Bezeichnet man daher die Länge der Sehne, vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen, durch $2s$, so hat man

$$2s' : 2s = \frac{1}{LT} : \frac{1}{LO}$$



Anfang des Jahres 1610, dass der Planet Jupiter vier Trabanten mit sich um die Sonne führe, die sehr häufigen Verfinsterungen unterworfen waren, indem sie in den hinter dem Planeten befindlichen Schatten eintreten. Wegen der in dieser Rücksicht vortheilhaftesten Lage der Bahnen der Trabanten, deren Ebenen mit der Ebene der Bahn des Haupttrabanten fast zusammenfallen, und wegen der kurzen Umlaufszeit derselben treten diese Jupiterstrabantenverfinsterungen viel öfter ein als die Mondfinsternisse, deren in jedem Jahre nie mehr als zwei, und zuweilen gar keine sichtbar sind. Man kann annehmen, dass aller zwei Tage beim ersten Trabanten (der dem Jupiter am nächsten liegt) entweder ein Eintritt (Immersion) oder ein Austritt desselben (Ennersion) aus dem Schatten statt findet. Schon sehr früh hatte man daher versucht Tafeln für die Bewegung derselben herzustellen, um die gemachten Beobachtungen der Finsternisse zur Auffindung der Länge benutzen zu können, allein erst durch die Bemühungen von Delambre, der eine sehr grosse Menge Beobachtungen dieser Trabanten anwendete, und die von Laplace entwickelte Theorie der Ungleichheiten der Bewegung benutzte, sind wir in den Stand gesetzt, diese Erscheinungen mit Vortheil bei der Bestimmung der Länge anwenden zu können, indem höchst selten die nach diesen Tafeln berechneten Verfinsterungen von den besten Beobachtungen um funfzehn Secunden abweichen, und diese Genauigkeit hat die frühern Tafeln von Wargentin und Bailly ausser Gebrauch gebracht.

Es ist nur zu bedauern, dass diese Methode der Längenbestimmung, obgleich sie für Landreisen sehr vortheilhaft ist, sich auf der See selbst gar nicht anwenden lässt, indem durch die immerwährende Bewegung des Schiffes es dem Beobachter unmöglich wird, den Trabanten im Gesichtsfelde des Fernrohrs zu erhalten, um so mehr, da zu Beobachtungen dieser Art stark vergrössernde Fernröhre, die daher zugleich eine verhältnissmässig grössere Länge besitzen, angewendet werden müssen. Man hat zwar zur Bequemlichkeit der Beobachter freihängende Sitze (chaises marines) vorgeschlagen (man hat deren von

Besson 1650, Irwin 1760, Fyot 1771), allein die Erfahrung hat gezeigt, dass ihre Anwendung von keinen Nutzen ist. Maskelyne, der auf seiner Reise nach Barbadoes einen Irwin'schen Sitz hatte, meint sogar, dass ihm die Beobachtungen ohne eine solche Vorrichtung besser gelungen wären, als mit Anwendung derselben.

Stellt man die Beobachtungen der Finsternisse auf dem festen Lande an, so ist man ebenfalls von einem zufälligen Umstande, nämlich der Stärke des Fernrohrs abhängig, indem zwei Beobachter mit ungleichen Fernröhren versehen, die Zeit des Eintritts oder des Austritts immer verschieden angeben werden, da derjenige, welcher mit dem stärkern Fernrohr beobachtet, den Trabanten später verschwinden und auch eher wieder hervortreten sieht.

Hell in Wien, welcher diese Methode die Länge zu bestimmen allen übrigen vorzog, gab folgende Regeln an, die man bei der Beobachtung der Finsternisse befolgen sollte. 1) Beobachte man blos die Verfinsterungen des ersten und zweiten Trabanten, da diese die schnellste Bewegung haben, also die Zeit des Verschwindens und des Hervortretens aus dem Schatten in engere Gränzen eingeschlossen ist. 2) Gebrauche man immer dasselbe Fernrohr. 3) Man nehme zur Längenbestimmung so viel Eintritte als Austritte. 4) Wähle man die Beobachtungen nicht zu

rn gesehen werden kann, deren Längenunterschied estimmt werden soll, während die an diesen Oerrn befindlichen Beobachter die Erscheinung des litzes an einer genau nach Sternzeit gehenden Uhr emerken. Der Unterschied der Beobachtungszeiten ebt die Meridiandifferenz an. Dieses Mittel den nterschied der Länge zu bestimmen, wird gewöhnch bei Messungen von Längengraden angewendet. o wurden z. B. zwischen Saint Preuil und Maennes folgende Zeitunterschiede im October 1823 rmittelst der Signale beobachtet, (Connoissance e tems 1829), wo die neben den Zeitunterschieden ehenden Zahlen die Unterschiede vom Mittel sind:

3′ 48″52	+ 0″49	3′ 49″22	— 0″21
48,75	+ 0,24	49,36	— 0,35
48,97	+ 0,04	49,03	— 0,02
49,10	— 0,09	49,32	— 0,31
48,78	+ 0,23	49,14	— 0,13
48,76	+ 0,25	49,37	— 0,36
48,75	+ 0,26	49,07	— 0,06
49,10	— 0,09	48,77	+ 0,24
48,87	+ 0,14	49,12	— 0,11
48,71	+ 0,30	49,12	— 0,11
48,83	+ 0,18	49,40	— 0,39
48,60	+ 0,41	49,13	— 0,12
49,23	— 0,22	49,47	— 0,46
48,95	+ 0,06	49,47	— 0,46
49,18	— 0,17	48,77	+ 0,24
48,98	+ 0,03	48,60	+ 0,41
49,18	— 0,17	49,13	— 0,12
48,97	+ 0,04	49,07	— 0,06
48,96	+ 0,05	48,67	+ 0,34
48,81	— 0,20	48,69	+ 0,32
49,05	— 0,04	49,43	— 0,42
49,40	— 0,39	48,42	+ 0,59
49,11	— 0,10	49,22	— 0,21

Mittel 3′ 49″012.

Die Summe der Quadrate der Fehler giebt 3″332, glich wenn man diese Summe durch 46 — 1 divirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht, erhält man den mittlern Fehler einer Beobachtung

= 0″272, und den mittlern bei dem Endresult befürchtenden Fehler = 0″0401.

§. 499.

Die bisher betrachteten Mittel die geograph Länge zu bestimmen, nämlich die Mondfinste Jupiterstrabantenverfinsterungen und Signale Pulverentzündungen, sind von der Beschaffenheit die Erscheinungen, die sich bei ihnen darbieten deren Zeiten zur Auffindung der Länge dienen alle Beobachtungsörter in demselben Augenblic sehen werden, und daher ohne weitere Reduct gebraucht werden können. Anders verhält es aber bei Beobachtungen von Sonnenfinsternissen deckungen der Sterne vom Monde, und Vorübe gen der untern Planeten, Mercur und Venu der Sonnenscheibe. Hierbei würde man einen sen Fehler begehen, wenn man aus dem Unters der Zeiten, zu welchen eine und dieselbe Er nung sich an verschiedenen Oertern der Erde direct auf den Unterschied der geographischen L der Beobachtungsörter schliessen wollte, sonde ist zu ihrer Vergleichung nothwendig, alle dies obachtungen auf einen bestimmten Ort der Erd reduciren, so dass man die Zeiten der verschie Erscheinungen so erhält, als ob alle Beobachter in diesem Punkte beisammen befunden hätten, jeder nach seiner eigenen Zeit, die dem Beo tungsort auf der Oberfläche der Erde entspricht Erscheinungen bemerkt hätte. Zu diesem ge schaftlichen Punkt erwählt man immer den M punkt der Erde, für welchen Punkt alle aus Tafeln für die Bewegung der Sonne, des Mondes der Planeten berechneten Oerter gelten. Man diese die wahren Oerter der Himmelskörper, Unterschiede von denen auf der Erdoberfläche achteten, welche die scheinbaren heissen; die ferenzen zwischen den wahren und scheinbaren tern sind die Parallaxen. Wir wollen zuerst z wie sich die scheinbaren oder beobachteten O des Himmelskörpers auf wahre reduciren lassen.

§. 500.

Man denke sich durch den Mittelpunkt der Erde, den wir als ruhend betrachten, drei sich rechtwinklicht durchschneidende Axen gelegt, von denen die erste die Axe der x nach den Nullpunkt des Widders oder den Frühlingsaequinoctialpunkt, die zweite der y nach den Nullpunkt des Krebses oder den Sommersolstitialpunkt, und die dritte nach dem Nordpol der Ecliptik (da die ersten in der Ebene der Ecliptik liegen) gezogen ist. Wir zählen zugleich die positiven Coordinaten irgend eines Punktes nach den angegebenen Richtungen, die negativen in den entgegengesetzten. Nun seyen die drei Coordinaten eines Himmelskörpers zu irgend einer Zeit T, X, Y, Z,

die wahre Länge des Himmelskörpers $= L$,
— — Breite — — $= B$,
der Abstand desselben vom Mittelpunkte der Erde

$$= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R,$$

so hat man leicht die drei Gleichungen

$$X = R.\ cos\, L.\ cos\, B,$$
$$Y = R.\ sin\, L.\ cos\, B,$$
$$Z = R.\ sin\, B.$$

Eben so seyen zu derselben Zeit die drei Coordinaten des Beobachtungsortes auf der Oberfläche der Erde x, y, z; zieht man dann vom Mittelpunkte der Erde durch den Beobachtungsort eine Linie bis an die Himmelskugel, so wird diese in einem Punkte getroffen werden, dessen Lage durch seine Länge und Breite ebenfalls bestimmt wird. Die Länge sey $= l$, die Breite $= b$, und der Abstand des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde

$$= \sqrt{xx + yy + zz} = r$$

und man erhält wie vorhin

$$x = r.\ cos\, l.\ cos\, b,$$
$$y = r.\ sin\, l.\ cos\, b,$$
$$z = r.\ sin\, b.$$

Denkt man sich ferner durch den Beobachtungsort drei Axen gelegt, welche den früher erwähnten parallel laufen, und nennt die drei Coordinaten des Himmelskörpers gegen diesen Anfangspunkt X', Y', Z'

die scheinbare Länge des Himmelskörpers $= L'$,

$$ang\, L = \frac{(1-\rho)\, sin\, L'\, cos\, B' + sin\, \varpi .\, sin\, l.\, cos\, b}{(1-\rho)\, cos\, L'\, cos\, B' + sin\, \varpi .\, cos\, l.\, cos\, b}$$

$$; L - tg\, L' = \frac{sin\, \varpi .\, cos\, b\, (sin\, l - cos\, l.\, tang\, L')}{(1-\rho)\, cos\, L'\, cos\, B' + sin\, \varpi .\, cos\, l.\, cos\, b}$$

. hieraus, da

$$ang\, L - tang\, L' = \frac{sin(L-L')}{cos\, L\, cos\, L'}$$

$$in(L-L') = \frac{cos\, L\, sin\, \varpi .\, cos\, b.\, sin(l-L')}{(1-\rho)\, cos\, L'\, cos\, B' + sin\, \varpi .\, cos\, l.\, cos\, b}.$$

Setzt man noch

$$5)\quad \frac{\rho .\, cos\, L'\, cos\, B' - sin\, \varpi .\, cos\, l.\, cos\, b}{cos\, L'\, cos\, B'} = q,$$

kommt mit Vernachlässigung der höhern Potenzen n q

$$6)\quad sin(L-L') = \frac{cos\, L.\, sin\, \varpi .\, cos\, b\, sin(l-L')(1+q)}{cos\, L'\, cos\, B'}.$$

Dass hierbei die unbekannte wahre Länge L in r Formel bei $cos\, L$ vorkommt, thut nichts zur che, indem man meistentheils ohne Fehler statt L, ' nehmen kann, und sollte dies etwa bei dem Mon- eine kleine Unrichtigkeit hervorbringen, so wie- rholt man die Rechnung, indem man den zuerst fundenen Werth von $L - L'$ zu L' addirt, und L erhält. Die Gleichung (3) giebt, wenn man it R dividirt

$$sin\, B - sin\, B' = sin\, \varpi\, sin\, b - \rho .\, sin\, B'$$

ler auch

$$7)\quad sin\left(\frac{B-B'}{2}\right) = \frac{sin\, \varpi .\, sin\, b - \rho .\, sin\, B'}{2\, cos\, \frac{1}{2}(B+B')}.$$

Auch hier gilt rücksichtlich des unbekannten Werthes von B dieselbe Bemerkung als vorhin.

Wollte man die wahren Oerter auf die scheinaren reduciren, so braucht man nur L und B mit ' und B' zu vertauschen, und $sin\, \varpi$ negativ zu ehmen.

Man sieht übrigens leicht ein, dass dieselben Forneln sich auch zur Berechnung der Parallaxe in grader Aufsteigung und in Declination gebrauchen lassen, enn man nur statt der Länge und Breite die grade ufsteigung und Declination nimmt.

§. 501.

Wir haben also zur Berechnung der Parallaxen die Formeln:

Wahrer Ort aus dem scheinbaren.

$$\cos\mu = \cos B' \cos b . \cos(L'-l) + \sin B' \sin b$$
$$\rho = \cos\mu . \sin\varpi + \tfrac{1}{2}\sin\mu^2 . \sin\varpi^2$$
$$q = \frac{\rho . \cos L' \cos B' - \sin\varpi . \cos l . \cos b}{\cos L' \cos B'}$$
$$\sin(L-L') = \frac{\cos L . \sin\varpi . \cos b \sin(l-L')(1+q)}{\cos L' \cos B'}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(B-B') = \frac{\sin\varpi . \sin b - \rho . \sin B'}{2\cos\tfrac{1}{2}(B+B')}.$$

Scheinbarer Ort aus dem wahren.

$$\cos\mu = \cos B . \cos b . \cos(L-l) + \sin B . \sin b$$
$$\rho' = \cos\mu . \sin\varpi - \tfrac{1}{2}\sin\mu^2 . \sin\varpi^2$$
$$q' = \frac{\rho' \cos L . \cos B - \sin\varpi \cos l . \cos b}{\cos L . \cos B}$$
$$\sin(L-L') = \frac{\cos L' . \sin\varpi . \cos b \sin(l-L)(1-q')}{\cos L \cos B}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(B-B') = \frac{\sin\varpi \sin b - \rho' \sin B}{2\cos\tfrac{1}{2}(B+B')}.$$

$$tang\, u = \frac{tang\, \delta}{sin\, \alpha},$$

$$cos\, v = cos\, \alpha .\, cos\, \delta$$

wird, folgende Gleichungen zur Bestimmung von b und l:

$$sin\, b = sin\, v .\, sin(u - \varepsilon)$$

$$tang\, l = tang\, v .\, cos(u - \varepsilon).$$

Diese Formeln lassen sich leicht folgendermassen ableiten: Es sey AQ (fig. 14.) die Ecliptik, AC der Aequator, S der Punkt auf der Himmelskugel, so ist AD seine grade Aufsteigung, SD die Declination, AB die Länge, SB die Breite desselben. Zieht man dann noch den Bogen eines grössten Kreises AS, so ist $u = \angle SAD$, $v = AS$, und die Gleichungen für b und l ergeben sich aus dem Dreieck ASB, da CAQ der Schiefe der Ecliptik gleich ist.

§. 503.

Die geocentrische Breite eines Ortes ist bekanntlich von der geographischen verschieden, und aus den Untersuchungen die hierüber §. 245. geführt sind ergiebt sich, dass wenn

die geocentrische Breite $= \delta$,
die geographische — $= p$,
die Abplattung der Erde $= \alpha$

gesetzt wird, dann mit Vernachlässigung der höhern Potenzen der Abplattung

$$\delta = p - \alpha .\, sin\, 2p$$

seyn muss. Nimmt man $\alpha = \frac{1}{297{,}4}$, so kommt, wenn man die Grösse welche von p abgezogen werden muss in Secunden haben will

$$\delta = p - 694''.\, sin\, 2p.$$

§. 504.

Die in den vorigen Rechnungen gebrauchte Horizontalparallaxe ϖ muss erst durch eine Reduction aus der abgeleitet werden, welche die Tafeln geben. Da nämlich die Erde keine Kugel ist, so hat r nicht für alle Beobachtungsörter einerlei Werth, und die

Tafeln müssen die Horizontalparallaxe für einen bestimmten Werth von r geben, für welchen der Halbmesser des Aequators angenommen ist. Bezeichnen wir diesen durch a, die Aequatorealhorizontalparallaxe durch Π, so hat man

$$a = R.\ sin\,\Pi, \qquad r = R.\ sin\,\varpi$$

und aus der bekannten Gestalt der Erde, wenn p die Polhöhe bedeutet:

$$r = a\,(1 - \alpha\ sin\,p^2).$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen a, r, R, so bleibt

$$sin\,\varpi = sin\,\Pi\,(1 - \alpha\ sin\,p^2),$$

wo man statt der Sinus von ϖ und Π ohne Fehler die Winkel selbst nehmen kann. Diese Correction ist aber blos bei dem Monde merklich, wo sie höchstens 12″ betragen kann; bei allen übrigen Himmelskörpern kann sie vernachlässigt werden.

§. 505.

Der Halbmesser des Himmelskörpers, den man aus den Tafeln entnimmt, bedarf ebenfalls einer Correction, da derselbe die scheinbare Grösse angiebt, die der Körper aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen haben würde. Nennt man daher den aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen Halbmesser Δ, den vom Beobachtungsort Δ', den wahren Halbmesser D, so ist

$$D = R.\ sin\,\Delta, \qquad D = R'.\ sin\,\Delta',$$

wo R und R' die Abstände des Himmelskörpers vom Mittelpunkte der Erde und vom Beobachtungsorte bedeuten. Es wird hieraus

$$sin\,\Delta' = \frac{R}{R'}.\ sin\,\Delta.$$

$$= \frac{sin\,\Delta}{1 - \rho}. \quad (\text{§. 500.})$$

$$= sin\,\Delta\ (1 + \rho)$$

folglich auch

$$sin\,\Delta' - sin\,\Delta = 2\,sin\,\frac{\Delta' - \Delta}{2}\ cos\,\frac{\Delta' + \Delta}{2} = \rho.\ sin\,\Delta$$

und wegen der Kleinheit des Unterschiedes $\Delta' - \Delta$ und der Grösse Δ selbst kann man

$$\Delta' - \Delta = \rho . \Delta$$

setzen. Nur bei dem Monde wird es nothwendig diese Verbesserung anzuwenden.

§. 506.

Wir wollen diese Formeln zur Berechnung der Sonnenfinsterniss vom 28. October 1799 gebrauchen, deren Ende v. Humboldt in Cumana beobachtete, und daraus die Länge dieses Ortes ableiten. Das Ende fand statt um

$T = 1799.$ October $28.\ 2^h\ 14'\ 23''4$

nach mittlerer Zeit in Cumana. An diesem Tage war die Sternzeit im mittlern Mittage, also am 28. October, $0^h\ 0'\ 0''$

$= 14^h\ 27'\ 8''8.$

Addirt man hierzu die mittlere Zeit der Beobachtung nach Mittag und die diesem Zeitraum zugehörige Voreilung der Fixsterne, so kommt

	$14^h\ 27'\ 8''8$
+	$2.\ 14.\ 23,4$
Voreilung +	$22,1$
	$16^h\ 41'\ 54''3$ = der graden Aufsteigung des Zeniths in Zeit.

Reducirt man dies auf Bogen, so wird

$\alpha = 250°\ 28'\ 34''5.$

Die Polhöhe von Cumana ist

$p = 10°\ 27'\ 55''$ nördlich

also nach §. 503. die geocentrische Breite des Beobachtungsortes oder die Declination des Zeniths

$\delta = p - 694''\ \sin 2p$

$= 10°\ 23'\ 47''.$

Die Schiefe der Ecliptik ist

$\varepsilon = 23°\ 28'\ 4''.$

Man erhält nun vermittelst der Formeln (§. 502.)

$\tang \delta = 9.2635631$

$\sin \alpha = 9.9742828\ n$

$\tang u = 9.2892803\ n$

$u = -\ 11°\ 0'\ 56''$

$$\sin p^1 = 8.51842$$
$$9.61141$$
$$0''41 = \Pi\alpha \sin p^1$$
$$\text{so } \varpi = 3683''26 - 0''41 = 3682''85 = 1^\circ\,1'\,22''85$$
$$\cos\mu = \cos B.\cos b\cos(L-l) + \sin B.\sin b.$$
$$\cos B = 0.00000 \qquad \sin B = 7.02631$$
$$\cos b = 9.92688 \qquad \sin b = 9.72811$$
$$\cos(L-l) = 9.93291 \qquad 6.75442$$
$$9.85979 \qquad + 0{,}00057$$
$$+ 0{,}72408$$
$$0{,}72465 = \cos\mu$$
$$\mu = 43^\circ\,33'\,35''$$
$$\rho' = \cos\mu \sin\varpi - \tfrac{1}{2}\sin\mu^2 \sin\varpi^2$$
$$q' = \frac{\rho'.\cos L.\cos B - \sin\varpi.\cos l.\cos b}{\cos L\cos B}$$
$$\log\rho' = 8.10931 - 10$$
$$q' = + 0{,}002011$$
$$\sin(L-L') = \frac{\sin\varpi\cos L'\cos b\sin(l-L)(1-q')}{\cos L.\cos B}.$$

Statt $\cos L'$ nehme man zuerst $\cos L$, so wird r genäherte Werth von $L-L'$

$$\sin(L-L') = \frac{\sin\varpi.\cos b.\sin(l-L)}{\cos B}$$
$$\sin\varpi = 8.25174$$
$$\cos b = 9.92688$$
$$\sin(l-L) = 9.71226$$
$$C.\cos B = 0{,}00000$$
$$7.89088 = \sin(L-L')$$
$$L-L' = 26'\,44''41$$
$$L' = 215^\circ\,37.\,47{,}86$$
$$7.89088$$
$$\cos L' = 9.90999\,n$$
$$C.\cos L = 0.09246\,n$$
$$\log(1-q') = 9.99913$$
$$7.89246 = \sin(L-L')$$
$$L-L' = 26'\,50''26$$

o scheinbare Länge des Mondes
$= 215^\circ\,37'\,42''01.$

Für die Breite hat man

$$\sin\tfrac{1}{2}(B-B') = \frac{\sin n.\sin b}{2\cos\frac{1}{2}(B+B')} - \frac{\rho.\sin B}{2\cos\frac{1}{2}(B+B)}$$

oder genau näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(B-B') = \frac{\sin n.\sin b}{2\cos B} - \tfrac{1}{2}\rho\ tang B$$

$$B-B' = \quad 0°\ 32'\ 49''15$$
$$B = -\ 0.\ 29.\ 10,00.$$

Der genaue Werth von $B-B'$ ergiebt sich = + 32′ 49″31, also die scheinbare Breite des Mondes

$$= -\ 0°\ 29'\ 7''26.$$

Endlich haben wir noch den Halbmesser des Mondes zu berechnen

$$\Delta = \delta + \rho\delta = 16'\ 58''17.$$

Für die Sonne erhält man

die scheinbare Länge =	215°	22′ 1″08
— — Breite =	—	4,46
den scheinb. Halbmesser =		16. 7,69.

§. 507.

Es befinde sich nun zu Anfang oder zu Ende der Finsterniss der Mittelpunkt des Mondes in M, der der Sonne in S (fig. 15.), so ist MS der Abstand der Mittelpunkte = der Summe der Halbmesser, MD die scheinbare Breite des Mondes, SD die der

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, kommt nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$\tg \tfrac{1}{2} BD = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(MS+SD-MB).\sin \tfrac{1}{2}(MS+MB-SD)}{\cos \tfrac{1}{2}(MS-MB-SD).\cos \tfrac{1}{2}(MS+MB+SD)}}$$

i vorliegenden Falle hat man

$MS = 16'\ 58''17 + 16'\ 7''69 = 33'\ 5''86$
$MB = -\ 29.\ 7,26, \qquad SD = -\ 4,46$
$\frac{1}{2}(MS + SD - MB) = 31'\ 4''33$
$\frac{1}{2}(MS + MB - SD) = 2.\ 1,53$
$\frac{1}{2}(MS - MB - SD) = 31.\ 8,79$
$\frac{1}{2}(MS + MB + SD) = 1.\ 57,07.$

eraus ergiebt sich nach voriger Formel

$$BD = 15'\ 51''88.$$

Nun ist aber BD nichts anders als der beobach-e scheinbare Längenunterschied der Sonne und des ondes; addiren wir daher hierzu den Unterschied r Längenparallaxen des Mondes und der Sonne

$$26'\ 50''26 - 3''83 = 26'\ 46''43,$$

erhalten wir den wahren Längenunterschied zu eser Zeit, wenn sich der Beobachter im Mittel-nkte der Erde befände $= 42'\ 38''31.$

r diesen Zeitpunkt hat man aus den Tafeln

stündliche Bew. des Mondes $= 38'\ 4''22$ in Länge
— — der Sonne $= 2.\ 30,08$
relative Bew. des Mondes $= 35'\ 34,14.$

Dividirt man den oben gefundenen wahren Längen-terschied durch die relative stündliche Bewegung s Mondes, so erhält man die Zeit, welche seit der ahren Conjunction der Sonne und des Mondes (wo ide gleiche Länge haben) verflossen ist, in Secun-n ausgedrückt

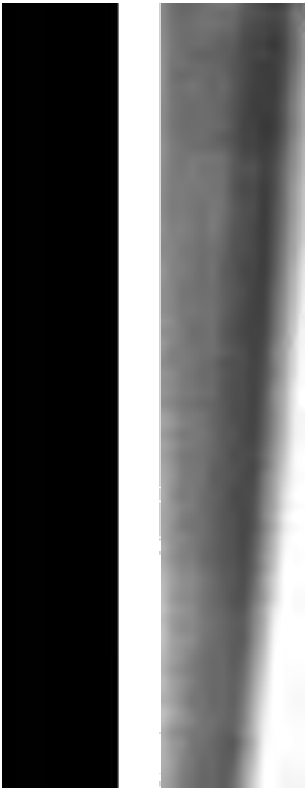
$$\frac{42'\ 38''31}{35'\ 34''14} = \frac{2558''31}{2134''14}$$
$$= 1^h\ 11987 = 1^h\ 11'\ 55''5.$$

Nun wurde das Ende der Finsterniss in Cumana n $2^h\ 14'\ 23''4$ beobachtet, also fand die wahre onjunction um

$1^h\ 2'\ 27''9$ mittlerer Zeit

Cumana statt *). Addirt man hierzu den proviso-

*) Es ist einleuchtend, dass wenn der Anfang der Finsterniss beobachtet worden wäre, so müsste man den Zeitunterschied zur Zeit der Beobachtung addiren, um die Conjunction zu erhalten.



egung des Mondes $= m$, die Zeit der
nction $= \theta$, so hat man

$$= T + \frac{\lambda}{m}.$$

wir nun die Summe der beiden Halb-
nne und des Mondes S, den scheinba-
terschied $6'$, den scheinbaren Längen-
eider Himmelskörper λ', so wird, wenn
rische Viereck $BMSD$ (fig. 15.) als ein
tes geradlinigtes Paralleltrapez betrach-
es wegen der geringen Dimensionen der
ei erlaubt ist,

$$\lambda'\lambda' = SS - 6'6';$$

$$\lambda' = \sqrt{SS - 6'6'}.$$

nden wir bei unserer Methode die Meri-
nz zu berechnen, λ aus λ' dadurch, dass
Unterschied der Längenparallaxen zu λ ad-
st daher die Längenparallaxe des Mondes
der Sonne $= h$, so wird

$$' + f - h = \sqrt{SS - 6'6'} + f - h.$$

ichnet man ferner den wahren Breitenunter-
urch 6, die Breitenparallaxe des Mondes
, die der Sonne durch h', so ist $6' = 6 -$
also

$$= \sqrt{SS - (6 - f' + h')^2} + f - h$$

an man diesen Werth von λ in die Gleichung

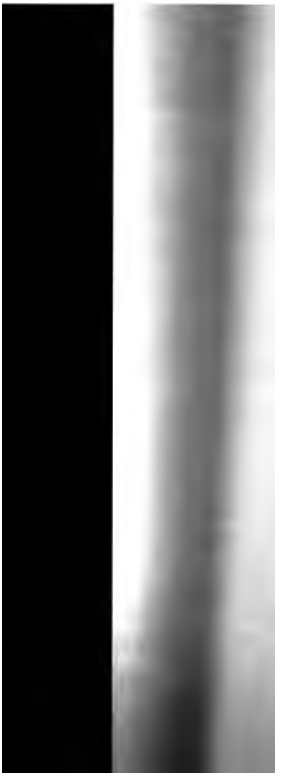
$$+ \frac{\lambda}{m}$$ substituirt, so kommt

$$T + \frac{\sqrt{SS - (6 - f' + h')^2} + f - h}{m}.$$

ifferentiirt man diese Gleichung, indem man T
veränderlich ansieht, so erhält man

$$= \frac{SdS - (6 - f' + h')\,(d6 - df' + dh')}{m\sqrt{SS - (6 - f' + h')^2}} + \frac{df - dh}{m}.$$

Nun sieht man aber aus den frühern Formeln
die Längenparallaxen und Breitenparallaxen, dass,
lben den Horizontalparallaxen sehr genau pro-



$f' - h' = 32' 45''03 = 1965''03$
$\pi = 61. 14,50 = 3674,50$
$\omega = -61° 21' 20''.$

Vorige Gleichung würde den Werth von $d\theta$ in Stunden angeben; will man daher $d\theta$ in Zeitsecunden erhalten, so muss man die Coefficienten von dS, $d\delta$, $d\pi$ noch mit 3600 multipliciren, und man findet dann, da das Ende der Finsterniss beobachtet wurde

Coeff. von $dS = -3,519$
— — $d\delta = -3,153$
— — $d\pi = -0,914$,

folglich die Correction

$$d\theta = -3,519\,dS - 3,153\,d\delta - 0,914\,d\pi$$

wo die Grössen dS, $d\delta$, $d\pi$ in Bogensecunden ausgedrückt werden müssen.

§. 510.

Hat man sowohl den Anfang als das Ende einer Sonnenfinsterniss berechnet, so erhält man zwei solcher Gleichungen, um die Zeit der wahren Conjunction zu corrigiren. Nehmen wir nun an, es sey für den Anfang der Finsterniss

$$d\theta = a\,dS + b\,d\delta + c\,d\pi$$

und für das Ende

$$d\theta' = a'\,dS + b'\,d\delta + c'\,d\pi,$$

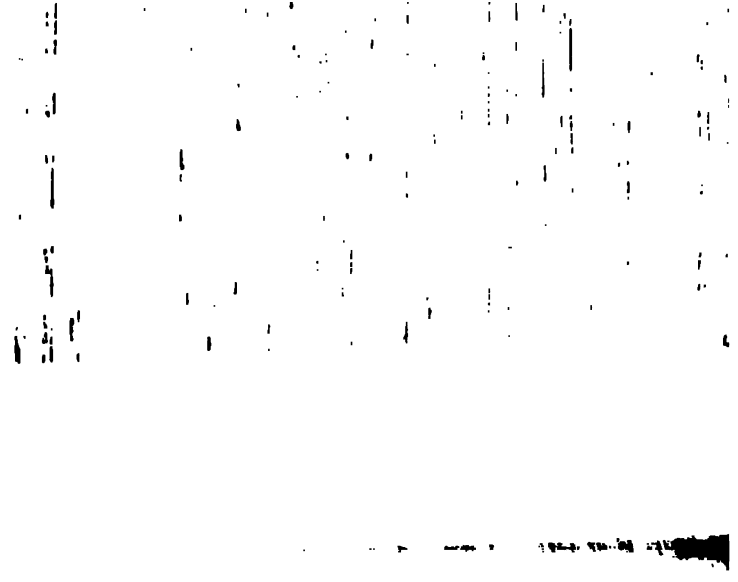
so müssen, wenn die Correctionen angebracht werden, beide Zeiten der wahren Conjunction, die aus dem Anfange und dem Ende der Finsterniss geschlossen werden, gleich seyn, d. h. es wird $d\theta - d\theta' = 0$, oder

$$(a - a')\,dS + (b - b')\,d\delta + (c - c')\,d\pi = 0.$$

Da nun die Coefficienten $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ bekannt sind, so sieht man, dass wenn an drei Orten der Anfang und das Ende einer Finsterniss beobachtet werden, sich aus den drei dadurch entstehenden Gleichungen die Correctionen dS, $d\delta$, $d\pi$ finden lassen.

§. 511.

Die Bedeckungen der Fixsterne durch den Mond werden auf dieselbe Art berechnet als die Sonnenfinsternisse, indem man nur statt der Sonnenlängen und Breiten, die Länge und Breite des Fixsterns nimmt.



nden; so kann man leicht berechnen, zu welcher in Paris diese Beobachtung angestellt worden Man hat nämlich die Gleichung

$$59° 58' 10'' - a + bt + ct^2.$$

Hieraus ergiebt sich näherungsweise

$$= \frac{59° 58' 10'' - a}{b} = \frac{4458''}{2293''17} = 1{,}94$$

der genauere Werth von

$$t = \frac{59°\,58'\,10'' - a - ct^2}{b}$$

$$= \frac{4455''71}{2293''17} = 1^h\ 56'\ 35''$$

wäre die Beobachtung am 25. März $1^h\ 56'\ 35''$ ser Zeit gemacht worden. Gesetzt nun man hät- ıf irgend eine Art die Zeit der Beobachtung nach enigen die am Beobachtungsorte gezählt wird = 1' 20'' gefunden, so würde der Meridianunter- ıd

$$3^h\ 14'\ 20'' - 1^h\ 56'\ 35'' = 1^h\ 17'\ 48''$$

ıgen, also liegt der Beobachtungsort 19° 26' 15'' ;h von Paris.

§. 513.

Es kommt also alles darauf an, dass man den nbaren gemessenen Abstand des Mondes auf den ren, aus dem Centrum der Erde gesehen, redu-

Dies ist sehr leicht, wenn man die Erde als Kugel betrachtet, also auf die Veränderlichkeit Halbmessers nicht Rücksicht nimmt. Es sey 16.) Z das Zenith des Beobachtungsortes, S und e scheinbaren Oerter des Sterns und des Mondes, ınd ZL ein paar Verticalkreise, so sind ZS, ZL complemente der scheinbaren Höhen beider Him- körper über dem Horizont, SL der scheinbare ınd derselben, und man hat, wenn

der scheinbare Abstand $= S$,
e scheinbare Höhe des Mondes $= H$,
— — — Sterns $= h$,

zt wird

$$s\ S = \sin H.\ \sin h + \cos H.\ \cos h.\ \cos SZL.$$

Der scheinbare Ort eines Sterns wird aus dem wahren gefunden, indem man den letztern rücksichtlich der Strahlenbrechung und der Parallaxe verbessert. Beide Veränderungen wirken in der Richtung der Verticalkreise; sind daher S und L die wahren Oerter des Sterns und des Mondes, so liegen die Punkte S und L mit auf den grössten Kreisen ZS, ZL, so dass die beiden Dreiecke SZL, SZL' den Winkel am Zenith gemeinschaftlich haben. Setzt man daher

den wahren Abstand $= S$,
die wahre Höhe des Mondes $= H$,
— — — — Sterns $= h$,

so hat man aus dem Dreieck $S'ZL'$

$$\cos S' = \sin H'. \sin h' + \cos H'. \cos h'. \cos SZL'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorigen welche $\cos S$ ausdrückt, indem man $\cos SZL$ oder SZL' die einander gleich sind, eliminirt, so erhält man

$$\frac{\cos S' - \sin H'. \sin h'}{\cos H'. \cos h'} = \frac{\cos S - \sin H. \sin h}{\cos H. \cos h}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin H'. \sin h' = -\cos(H' + h') + \cos H'. \cos h'$$
$$\sin H. \sin h = -\cos(H + h) + \cos H. \cos h$$

folglich kann man vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\cos S' + \cos(H'+h')}{\cos H'. \cos h'} = \frac{\cos S + \cos(H'+h)}{\cos H. \cos h}$$
$$= \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(H+h+S)\ \cos\tfrac{1}{2}(H+h-S)}{\cos H. \cos h}.$$

Ferner ist

$$\cos S' = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}S'^2$$
$$\cos(H'+h') = 2.\cos\tfrac{1}{2}(H'+h')^2 - 1.$$

Setzt man dann

$$\frac{\cos\tfrac{1}{2}(H+h+S).\cos\tfrac{1}{2}(H+h-S).\cos H'.\cos h'}{\cos H.\cos h\ \cos\tfrac{1}{2}(H'+h')^2} = \sin N^2,$$

so wird

$$\cos\tfrac{1}{2}(H'+h')^2 - \sin\tfrac{1}{2}S'^2 = \sin N^2.\cos\tfrac{1}{2}(H'+h')^2$$

und hieraus erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}S' = \cos N.\cos\tfrac{1}{2}(H'+h')$$

welches die verlangte Formel ist, die zuerst von Borda angegeben wurde.

§. 514.

Man sieht also, dass zur Berechnung des wahren standes aus dem scheinbaren, die wahren und einbaren Höhen beider Gestirne bekannt seyn müs-

1. Man ziehe zuerst von den beobachteten Höhen e Strahlenbrechung ab (§. 473.), so erhält man für e Fixsterne sogleich die wahre Höhe, da bei die-n keine Parallaxe statt findet. Bei dem Monde und der nne hingegen muss noch die Correction wegen der rallaxe angebracht werden, indem man zu der n der Strahlenbrechung befreieten Höhe einen Winkel ϖ hinzuaddirt, der durch die Gleichung

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \cos H$$

estimmt wird, wo Π die Horizontalparallaxe des immelskörpers bedeutet.

Es ist noch zu bemerken, dass auf dem Meere ie Höhenbeobachtung eine Correction erleidet, die aher rührt, dass man bei Seereisen wegen der Bewegung des Schiffs keinen künstlichen Horizont (ein efäss mit Oel, oder Quecksilber, oder eine Glasplatte) anwenden kann, sondern den Abstand des sterns vom Meereshorizont messen muss. Nun sey C der Mittelpunkt der Erde (fig. 17.), die wir hier als eine Kugel betrachten können, in E der Beobachter, der die Höhe EA über dem Meeresniveau hat, ET eine vom Auge des Beobachters gezogene Berührungslinie, so wird in T der scheinbare Meereshorizont sich zeigen; zieht man dann EP senkrecht auf CE, so giebt EP den wahren Horizont, und der Winkel PET ist die Depression des Meerhorizonts. Nun hat man $PET = TCE$, $\cos TCE = \frac{TC}{EC}$; bezeichnet man also die Höhe des Beobachters EA durch h, den Halbmesser der Erde durch a, so wird

$$\cos TCE = \frac{a}{a+h},$$

$$1 - \cos TCE = \frac{h}{a+h},$$

oder wegen der geringen Grösse des Winkels TCE und des Verhältnisses $\frac{h}{a}$,

$$TCE = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 206265'' \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

wenn man den Winkel in Secunden haben will. Nimmt man $a = 3272000$ Toisen, so kommt auch

$$TCE = 161''26 \sqrt{h}$$

wo die Höhe h ebenfalls in Secunden ausgedrückt seyn muss. Wegen der Strahlenbrechung wird aber der Horizont etwas erhöht, und man kann diese Erhöhung im Mittel $= \frac{8}{100} TCE$ setzen, so dass die wirkliche Depression durch die Formel

$$TCE = 148''36 \sqrt{h}$$

gefunden wird.

§. 515.

Da man bei der Beobachtung des Abstandes des Mondes von der Sonne oder den Sternen, nur den Abstand der Ränder von einander messen kann, hingegen die Rechnung immer für die Mittelpunkte dieser Körper geführt werden muss, indem die Ephemeriden den Abstand der Mittelpunkte von einander geben, so muss man zu den gemessenen Abstand sogleich die Summe der Halbmesser des Mondes und der Sonne addiren, die man aus den Ephemeriden entnehmen kann. Hierbei ist aber zu bemerken, dass der aus den Ephemeriden entnommene Halbmesser des Mondes, der für den Mittelpunkt der Erde gilt, um eine Grösse vermehrt werden muss, die der grössern Nähe des Mondes zum Beobachter auf der Erde proportional ist. Bezeichnet man den Halbmesser des Mondes durch Δ, so ist (§. 505.) die Correction $= \Delta$, und da nach §. 500. $\rho = \cos\mu \sin \Pi$, so ist auch die Correction $= \Delta . \cos\mu . \sin \Pi$; nun sieht man aber aus dem §. 500. gegebenen Ausdruck leicht, dass der Winkel μ nichts anders ist als der Abstand des Zeniths vom Himmelskörper, also gleich dem Complement der Höhe $= 90° - H$, folglich wird $\cos\mu = \sin H$, und der scheinbare Halbmesser des Mondes

$$= \Delta + \Delta . \sin \Pi . \sin H.$$

§. 516.

Wir wählen hierbei folgendes Beispiel: Am 10. Februar 1776 wurde um 5 Uhr Nachmittags ungefähr in einer auf 150° westlich von Paris geschätzten Länge beobachtet.

Höhe des obern Mondrandes	=	54° 31′ 0″
Höhe des untern Sonnenrandes	=	6. 15. 15.
Abstand d. beiden nächsten Ränder	=	108. 10. 29.
Halbmesser des Mondes	=	15. 7.
— der Sonne	=	16. 15.
Horizontalparallaxe des Mondes	=	55. 19.
— der Sonne	=	0. 8.
Depression des Horizonts	=	3. 56.
corrigirter Halbmesser des Mondes	=	15. 19.

Hierdurch erhält man

scheinb. H. d. Mittelp. d. ☾	scheinb. H. d. Mittelp. d. ☉
54° 31′ 00	6° 15′ 15″
— 15. 19	+ 16. 15.
— 3. 56	— 3. 56.
H = 54° 11. 45	h = 6° 27. 34.

Scheinbarer Abstand der Mittelpunkte

108° 10′ 29″
\+ 15. 19.
\+ 16. 15.

108° 42. 3. = S.

Um die wahren Höhen zu erhalten, muss man wegen der Parallaxe und Strahlenbrechung bei der Sonne 7′ 33″ abziehen, und bei dem Monde 31′ 42″ hinzuaddiren. Es wird dann

H' = 54° 43′ 27″
h' = 6. 20. 1.

Man hat dann nach den Formeln §. 513.

$\frac{1}{2}(H+h+S)$	=	84° 40′ 41″
$\frac{1}{2}(H+h-S)$	=	— 24. 1. 22.
$\frac{1}{2}(H'+h')$	=	30. 31. 44.

$cos\,\frac{1}{2}(H+h+S)$	=	8.9673230
$cos\,\frac{1}{2}(H+h-S)$	=	9.9606532
$cos\,H'$	=	9.7615620
$cos\,h'$	=	9.9973412
$C.\,cos\,H$	=	0.2328318

$$\begin{aligned} C.\ \cos h &= 0.0027658 \\ C.\ \cos \tfrac{1}{2}(H+h')^2 &= 0.1296174 \\ \hline & 9.0520944 = \sin N^2 \\ \sin N &= 9.5260472 \\ N &= 19^\circ\ 37'\ 11'' \\ \cos N &= 9.9740242 \\ \cos \tfrac{1}{2}(H'+h') &= 9.9351913 \\ \hline & 9.9092155 = \sin \tfrac{1}{2} S' \\ \tfrac{1}{2} S' &= 54^\circ\ 13'\ 45''5 \\ S' &= 108.\ 27.\ 31. \end{aligned}$$

wodurch der wahre Abstand gefunden ist.

§. 517.

Um nun weiter hieraus die wahre Länge des Schiffes zur Zeit der Beobachtung zu schliessen, findet man aus der Connoissance des tems

um	$15^h\ 9'\ 16''$	Abstand $= 108^\circ\ 37'\ 00''$
	18. 9. 16.	$= 107.\ 12.\ 12.$

also beträgt in drei Stunden die Abnahme des Abstandes $1^\circ\ 24'\ 48''$. Der Unterschied zwischen dem berechneten und dem ersten Abstande ist $= 9'\ 29''$; man mache daher die Proportion

$$1^\circ\ 24'\ 48'' : 9'\ 29'' = 3^h : x,$$

so findet sich $x = 1208'' = 20'\ 8''$, also war die Zeit in Paris wo der Mond von der Sonne den Abstand $108^\circ\ 27'\ 31''$ hatte $= 15^h\ 9'\ 16'' + 20'\ 8'$ $= 15^h\ 29'\ 24''$. Die Zeit, welche bei dem Beobachter gezählt wurde, lässt sich leicht aus der wahren Höhe der Sonne, der Declination derselben, und der Polhöhe des Ortes finden. Bezeichnet man nämlich die Polhöhe durch p, die Declination durch δ, den Stundenwinkel durch t, so hat man bekanntlich

$$\cos t = \frac{\sin h' - \sin p.\ \sin \delta}{\cos p.\ \cos \delta}$$

oder

$$1 - \cos t = \frac{\cos(p-\delta) - \sin h'}{\cos p.\ \cos \delta}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(90 - h' - p + \delta)\ \sin \tfrac{1}{2}(90 - h' + p - \delta)}{\cos p.\ \cos \delta}}$$

Nun war im vorliegenden Beispiel

den 10. Febr. $0^h\ 0' \ldots . \delta = -14°\ 22'\ 37''$

— 11. — $\delta = -14.\ 03.\ 00.$

also beträgt die Declination am 10. Febr. $15^h\ 29'\ 24''$,

$-14°\ 22'\ 37'' + 12'\ 39'' = -14°\ 9'\ 58'' = \delta$.

Die Polhöhe des Beobachtungsortes ist $p = 10°\ 20'$, die wahre Höhe $h' = 6°\ 20'\ 1''$,

$$\tfrac{1}{2}(90 - h' - p + \delta) = 29°\ 35'\ 0''$$
$$\tfrac{1}{2}(90 - h' + p - \delta) = 54.\ 4.\ 59$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(90 - h' - p + \delta) = 9.6934534$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(90 - h' + p - \delta) = 9.9084144$$
$$C.\cos p = 0.0071016$$
$$C.\cos \delta = 0.0134126$$
$$9.6223820$$
$$9.8111910$$
$$\tfrac{1}{2}t = 49°\ 20'\ 52''$$
$$t = 80.\ 41.\ 44.$$

also in Zeit ausgedrückt $5^h\ 22'\ 47''$. Zieht man dies von der berechneten Pariser Zeit $15^h\ 29'\ 24''$ ab, so bleibt der Meridianunterschied $10^h\ 6'\ 37''$ westlich von Paris, oder in Graden ausgedrückt befand sich der Beobachter in 151° 39′ 15″ westlicher Länge.

§. 518.

Hat man den Abstand eines Sterns von dem Mondsrande gemessen, so wird die Rechnung auf dieselbe Art geführt als in den vorigen Paragraphen, nur rücksichtlich der Zeitbestimmung aus der Höhe des Sterns muss man nach §. 467 bis 469. die Zeit der Culmination des Sterns berechnen, dann den Stundenwinkel nach §. 517. suchen, diesen auf mittlere Zeit reduciren und denselben von der Culminationszeit des Sterns abziehen oder zu derselben addiren, jenachdem die Beobachtung vor oder nach der Culmination gemacht ist.

§. 519.

Auf der See, oder überhaupt an Orten wo man keine Gelegenheit hat den Gang der Uhr genau zu

bestimmen, oder die Uhr selbst einen zu ungleichförmigen Gang hat, sind eigentlich zu jeder Beobachtung dieser Art drei Beobachter nothwendig, von denen der eine den Abstand des Mondes von der Sonne oder dem Stern, die beiden andern in demselben Augenblick die Höhen dieser Himmelskörper messen. Allein folgendermassen kann ein einzelner Beobachter alle drei erforderlichen Winkel bestimmen, wenn er nur eine Uhr besitzt die während einer halben Stunde einen gleichförmigen Gang hält und Secunden zeigt, wozu eine gewöhnliche Taschenuhr mit einem Secundenzeiger hinreichend ist. Er misst zuerst die Höhe des Mondes und der Sonne oder des Sterns, hierauf nimmt er den Abstand beider Himmelskörper und sogleich hernach wieder die Höhen; bei allen Messungen bemerkt er die Zeit. Aus den Aenderungen der Höhe des Mondes und der Sonne innerhalb der verflossenen Zeiten, finden sich dann durch eine leichte Interpolation die Höhen, die zu der Zeit statt fanden, zu welcher er den Abstand mass.

§. 520.

Hat man hingegen eine gute Uhr bei den Beobachtungen, die man auf dem festen Lande anstellt, so thut man am besten, dass man mehrere Abstände des Mondes von der Sonne oder den Sternen nimmt, die Höhen aber gar nicht misst, sondern die Zeiten genau bestimmt, und aus diesen sowohl als aus den gemessenen Abständen das arithmetische Mittel sucht; die wahren und scheinbaren Höhen berechnet man aus den Zeiten der Polhöhe und der Declination. So beobachtete z. B. v. Humboldt in Cumana am 7. August 1799 folgende Abstände des Mondrandes vom Antares (α Scorpii).

Abstände	mittlere Zeit in Cumana
26° 54′ 48″	9ʰ 4′ 4″
53. 28.	9. 8. 2.
51. 28.	9. 13. 52.
49. 28.	9. 17. 39.
47. 48.	9. 20. 17.
45. 28.	9. 23. 40.
Mittel 26° 50′ 24″7	Mittel 9ʰ 14′ 35″7.

Aus der schon früher gefundenen Länge von Cumana kann man schliessen, dass diese Zeit ungefähr mit $13^h\ 35'$ in Paris übereinstimmt. Die Polhöhe von Cumana setzen wir

$$p = +\ 10°\ 27'\ 52''5.$$

Wir müssen nun zuerst die wahren und scheinbaren Höhen des Mondes und des Antares für die Beobachtungszeiten berechnen. Wir haben aus den Tafeln

1799. August 7. $13^h\ 35'$ mittl. Zeit. Paris
grade Aufsteigung des Mondes $= 218°\ 49'\ 31''$
— — der Sonne $= 137.\ 53.\ 15$

Unterschied $80.\ 56.\ 16.$

Die Zeitgleichung beträgt an diesem Tage $+\ 5'\ 24''2$, man hat also

Beobacht. $9^h\ 14'\ 35''7$ mittl. Zeit
$-\ 5.\ 24,2$

$9^h\ 9.\ 11,5$ wahre Zeit

oder in Graden ausgedrückt

Stundenw. der Sonne $= 137°\ 17'\ 52''5$ westl.
grade Aufst. $☾ - ☉ = 80.\ 56.\ 16.$

Stundenw. des ☾ $36.\ 21.\ 36,5$ westl. $= t$
Declination des ☾ $= -\ 15.\ 16.\ 5,6 = \delta.$

Bezeichnet man dann die Höhe durch H', so hat man nach der bekannten Formel

$$\sin H' = \sin p.\ \sin \delta + \cos p.\ \cos \delta.\ \cos t$$

$\sin p = 9.2591821$ $\quad$ $\cos p = 9.9927158$
$\sin \delta = 9.4205135\ n$ $\quad$ $\cos \delta = 9.9843939$

$8.6796956\ n$ $\quad$ $\cos t = 9.7434870$

9.7205967

$0,5255290$
$-\ 0,0478295$

$0,4776995$

$\sin H' = 9.6791547$
$H' = 28°\ 32'\ 6''9$

wodurch die wahre Höhe des Mondes, aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen, gefunden ist. Um die des Antares zu finden, hat man

grade Aufsteigung des Antares	=	244° 16′ 58″
— — des Mondes	=	218. 49. 31
		25. 27. 27
Stundenwinkel des Mondes	=	56. 21. 36,5
Stundenw. d. Antares westlich	=	30. 54. 9,5
Declination des Antares	= —	25. 58. 29.

Hierdurch erhält man wie vorher für den Mond wahre Höhe des Antares = 42° 45′ 53″1.

Zur Berechnung der Refractionen hat man

Barometer = 28″15 Par. Maass

Thermometer = + 30° Cent. Scale

und hieraus findet sich nach §. 473.

Strahlenbrechung des Mondes = 1′ 40″2

—— des Antares = 0. 59,0.

Die Höhenparallaxe des Mondes ϖ ergiebt sich aus der Formel

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \cos H$$

wo Π die Horizontalparallaxe = 59′ 14″8 bedeutet; man erhält ϖ = 52′ 3″0

scheinbare Höhe d. Mondes	des Antares
28° 32′ 6″9	42° 45′ 53″1
— 52. 3,0	+ 0. 59,0
+ 1. 40,2	42. 46. 52,1. = h.
27. 41. 44,1 = H.	

Der Halbmesser des Mondes beträgt 16′ 10″3, und wenn man die §. 515. erwähnte Correction an demselben anbringt, so erhält man denselben = 16′ 18″3. Da der angegebene Abstand des Mondrandes vom Antares sich auf den vom Stern abgewendeten Rand bezieht (es war nämlich das erste Viertel des Mondes, und der Stern stand östlich vom Monde, so dass der dem Sterne zugewendete Rand dunkel war), so muss man den Mondshalbmesser vom gemessenen Abstande abziehen, und man erhält den scheinbaren Abstand des Mittelpunkts des Mondes vom Antares = 26° 34′ 6″4.

Wir haben also zur Berechnung des wahren geocentrischen Abstands folgende Data:

H = 27° 41′ 44″1

H' = 28. 32. 06,9

h = 42. 46. 52,1

$$
\begin{aligned}
h' &= 42^\circ\,45'\,53''1\\
\tfrac{1}{2}(H+h+S) &= 48.\ 31.\ 21,3\\
\tfrac{1}{2}(H+h-S) &= 21.\ 57.\ 14,9\\
\tfrac{1}{2}(H'+h') &= 35.\ 39.\ 00,0\\
S &= 26.\ 34.\ 06,4.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergiebt sich nach den §. 513. entwickelten Formeln

$$
\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(H+h+S) &= 9.8210710\\
\cos\tfrac{1}{2}(H+h-S) &= 9.9673061\\
\cos H' &= 9.9437533\\
\cos h' &= 9.8657835\\
C.\cos H &= 0.0528460\\
C.\cos h &= 0.1343323\\
C.\cos\tfrac{1}{2}(H'+h')^2 &= 0.1802544\\
\hline
\sin N^2 &= 9.9653466\\
\hline
\sin N &= 9.9826733\\
N &= 73^\circ\ 55'\ 31''8\\
\cos\tfrac{1}{2}(H'+h') &= 9.9098728\\
\cos N &= 9.4423027\\
\hline
& 9.3521755 = \sin\tfrac{1}{2}S'\\
\tfrac{1}{2}S' &= 13^\circ\ 0'\ 9''6\\
S' &= 26.\ 0.\ 19,2
\end{aligned}
$$

wodurch der wahre geocentrische Abstand zu der für Cumana angegebenen Zeit gefunden ist. Man muss nun noch bestimmen, zu welcher Zeit in Paris dieser Abstand statt fand. Es ist für die angegebene pariser Zeit 1799. August 7. $13^h\ 35'$

wahre Länge des Mondes = $221^\circ\ 16'\ 29''1 = L$
— Breite — — = — $0.\ 2.\ 31,7 = B$
— Länge — Antares = $246.\ 57.\ 48,4 = l$
— Breite — — = — $4.\ 32.\ 22,3 = b$.

Bezeichnet man dann den Abstand durch σ, so ist bekanntlich

$$\cos\sigma = \sin B.\sin b + \cos B.\cos b.\cos(L-l)$$

und $L - l = -25^\circ\ 41'\ 19''3$. Wegen der geringen Grösse von B setze man

$$\cos b.\cos(L-l) = \cos\sigma'$$
$$\sigma = \sigma' - x,$$

so hat man mit Vernachlässigung der Potenzen von B und x

$$\cos\sigma' + x.\sin\sigma' = B.\sin b + \cos\sigma'$$

$$x = + \frac{B.\sin b}{\sin\sigma'}$$

$$\begin{aligned} \cos b &= 9.9986354 \\ \cos(L-l) &= 9.9548031 \\ \hline & 9.9534385 = \cos\sigma' \\ \sigma' &= 26^\circ\ 3'\ 35''5 \\ \log B &= 2.18099\,n \\ \sin b &= 8.89844\,n \\ C.\sin\sigma' &= 0.35723 \\ \hline & 1.43666 = \log x \\ x &= + 27''3 \\ \sigma &= 26^\circ\ 3'\ 35''5 - 27''3 \\ &= 26.\ 3.\ 8,2. \end{aligned}$$

Differentiirt man die Gleichung

$$\cos\sigma = \sin B.\sin b + \cos B.\cos b.\cos(L-l)$$

indem man σ, B, L als veränderlich betrachtet, so kommt

$$d\sigma = \left(\frac{\sin B.\cos\sigma'}{\sin\sigma} - \cos B.\frac{\sin b}{\sin\sigma}\right) dB + \frac{\cos B.\cos b.\sin(L-l)}{\sin\sigma}$$

oder wenn man die numerischen Werthe substituirt

$$d\sigma = 0{,}1802\,dB - 0{,}9836\,dL.$$

Nun hat man für die stündliche Bewegung des Mondes

$$\begin{aligned} dB &= -\ 3'\ 7''16 \\ dL &= +\ 35.\ 16{,}69, \end{aligned}$$

also die Zunahme $d\sigma$ des Abstandes für die in Stunden ausgedrückte Zeit t

$$\begin{aligned} d\sigma &= -\ t\,[0{,}1802\ (3'\ 7''16) + 0{,}9836\ (35'\ 16''69)] \\ &= -\ t\ 2115''7. \end{aligned}$$

Es ist nun aber

$$S - \sigma = -\ 2'\ 49''0 = -\ 169'' = d\sigma$$

$$t = \frac{169}{2115{,}7} = 4'\ 47''6$$

also würde der berechnete Abstand S zu Paris um

$$13^h\ 35' + 4'\ 47''6 = 13^h\ 39'\ 47''6$$

statt gefunden haben. In Cumana wurde derselbe um

$$9^h\ 14'\ 35''7$$

beobachtet, folglich würde der Meridianunterschied zwischen Paris und Cumana

$4^h\ 25'\ 11''9$

betragen, oder Cumana liegt in 66° 17′ 58″5 westlicher Länge von Paris.

§. 521.

Wir haben bei den vorigen Rechnungen die Erde als eine Kugel betrachtet, und diese Annahme ist im Allgemeinen auch bei allen Längenbestimmungen die zur See geschehen, wo die Umstände der Genauigkeit der Beobachtungen hinderlich sind, genau genug. Allein bei Messungen die man zu Lande anstellt, kann man eine grössere Genauigkeit der Beobachtungen verlangen, und es ist daher erforderlich, auch die Rechnungen mit der grössten Strenge durchzuführen. Wir wollen daher jetzt untersuchen, welchen Einfluss die sphäroïdische Gestalt der Erde auf das Endresultat der Berechnung des wahren Abstandes aus dem scheinbaren ausübt. Hierzu müssen wir zuerst den beobachteten Abstand auf denjenigen reduciren, der ohne die Strahlenbrechung statt finden würde. Es sey der mit der Strahlenbrechung behaftete Abstand $S°$, die mit der Strahlenbrechung behafteten Höhen des Mondes $H°$, der Sonne oder des Sterns $h°$ *, die Strahlenbrechungen für den Mond $= K$, für die Sonne k, der von der Strahlenbrechung befreiete Abstand $= S'$, so berechnet man nach den früher angegebenen Gleichungen

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(H^0+h^0+S^0).\cos\frac{1}{2}(H^0+h^0-S^0).\cos(H^0-K)\cos(h^0-k)}{\cos H^0.\ \cos h^0\ \cos\frac{1}{2}(H^0+h^0-K-k)^2} = \sin N^2$$

$$\cos N.\ \cos\tfrac{1}{2}(H^\circ+h^\circ-K-k) = \sin\tfrac{1}{2}S'$$

die Grösse S', welche den Winkel ausdrückt, die die nach dem Mond und der Sonne vom Orte des Beobachters gezogenen Gesichtslinien einschliessen.

Sind die Höhen bedeutend, so kann man die Vermehrung des Abstandes folgendermassen finden. Das Dreyeck SZL (fig. 16.) giebt

*) Sind die Höhen nicht wirklich beobachtet, so muss man sie wie im vorigen Paragraph geschehen ist, aus der Zeit berechnen.

$\cos S^\circ = \sin H^\circ . \sin h^\circ + \cos H^\circ . \cos h^\circ \cos SZL$

folglich wenn man die Gleichung differentiirt, indem LZS als unveränderlich betrachtet wird, da dieser Winkel sich durch die Strahlenbrechung nicht ändert

$$-\sin S . dS = \cos H \sin h . dh + \cos h . \sin H . dh$$
$$-(\sin H . \cos h\, dH + \sin h . \cos H\, dh) . \sin SZL.$$

Nun ist aber bei bedeutenden Höhen die Strahlenbrechung der Cotangente der Höhe proportional, folglich, da die Höhe durch die Strahlenbrechung vermindert wird, kann man setzen

$$dH = -i . \cot H, \quad dh = -i . \cot H,$$

wo man vermittelst des §. 473. gegebenen Ausdrucks für die Strahlenbrechung leicht sieht was der constante Coefficient bedeutet. Substituirt man diese Werthe von dH, dh in vorige Gleichung, so kommt

$$+\sin S . dS = +i \frac{\cos H^2 \sin h^2 + \cos h^2 \sin H^2}{\sin h . \sin H}$$
$$-2i . \cos H . \cos h . \cos SZL.$$

Multiplicirt man die Gleichung

$$\cos S = \sin H . \sin h + \cos H . \cos h . \cos SZL$$

durch $2i$, und addirt das Product zu voriger Gleichung, so wird

$$\sin S . dS = i\left(\frac{\sin h}{\sin H} + \frac{\sin H}{\sin h}\right) - 2i \cos S$$

und hieraus

$$dS = i\left(\frac{\sin h^2 + \sin H^2}{\sin H . \sin h . \sin S} - 2 \cot S\right).$$

Der wahre von der Strahlenbrechung befreiete Abstand ist dann $= S^\circ + dS$.

§. 522.

Wir denken uns nun durch den Ort des Beobachters drei rechtwinklichte Axen gelegt, von denen die Axe der x nach dem Ostpunkt, die der y nach dem Südpunkt, und die der z nach dem Zenith gezogen ist; mit diesen parallel legen wir drei andere Axen durch den Mittelpunkt der Erde, nennen die Coordinaten des Mondes rücksichtlich der ersten Axen X', Y', Z', rücksichtlich der letztern X, Y, Z, die Coordinaten des Beobachtungsortes ξ, η, ζ, den Abstand des Mondes vom Mittelpunkte der Erde R,

vom Beobachtungsorte R', den Halbmesser der Erde am Beobachtungsorte ρ, die geocentrische Höhe H, den Winkel, welchen der durch den Mittelpunkt des Mondes gelegte Verticalkreis mit dem ersten Verticalkreise bildet, A, dieselben Grössen vom Beobachtungsorte aus gesehen H', A', den Winkel, welchen die Axe der z mit dem Radius Vector der Erde bildet, μ, wo μ den Unterschied zwischen der geographischen und geocentrischen Breite des Beobachtungsortes bedeutet, und $\mu = 692''. \sin 2p$ ist, wenn p die Polhöhe des Beobachtungsortes angiebt, so hat man

$X = R.\cos A.\cos H$; $Y = R.\sin A.\cos H$; $Z = R.\sin H$

$X' = R'.\cos A'.\cos H'$; $Y' = R'.\sin A'.\cos H'$; $Z' = R'.\sin H'$

$\xi = 0$; $\eta = \rho.\sin\mu$; $\zeta = \rho.\cos\mu$.

Bezeichnet man eben so die für die Sonne oder den Stern geltenden Grössen durch kleine Buchstaben, so wird

$x = r.\cos a.\cos h$; $y = r.\sin a.\cos h$. $z = r.\sin h$

$x' = r'.\cos a'.\cos h'$; $y' = r'\sin a'.\cos h'$. $z' = r'.\sin h'$.

Nennt man den Winkelstand beider Körper vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen S, vom Beobachtungsorte aus S', und bezeichnet die wirkliche Entfernung des Mondes von der Sonne oder dem Stern durch s, so erhält man leicht

$$ss = RR + rr - 2Rr.\cos S$$
$$ss = R'R' + r'r' - 2R'r'.\cos S'.$$

Nun ist aber

$$ss = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2$$
$$= RR + rr - 2(Xx + Yy + Zz)$$

und eben so auch

$$ss = (X'-x')^2 + (Y'-y')^2 + (Z'-z)^2$$
$$= R'R' + r'r' - 2(X'x' + Y'y' + Z'z').$$

Substituirt man diese Werthe in vorige Gleichungen, so wird

$$R.r.\cos S = Xx + Yy + Zz$$
$$R'.r'.\cos S' = X'x' + Y'y' + Z'z',$$

oder wenn man statt der Coordinaten ihre oben angeführten Werthe substituirt, und durch Rr, $R'r'$ dividirt

$$\cos S = \cos A.\cos H.\cos a.\cos h + \sin A.\cos H.\sin a.\cos h + \sin H.\sin h$$
$$\cos S' = \cos A'.\cos H'.\cos a'.\cos h' + \sin A'.\cos H'.\sin a'.\cos h' + \sin H'.\sin h'.$$

§. 523.

Vermöge der Lage der Coordinatenaxen müssen aber folgende drei Gleichungen statt finden:

$$X = X' + \xi, \quad Y = Y' + \tau, \quad Z = Z' + \zeta$$

und eben so auch

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \tau, \quad z = z' + \zeta,$$

folglich wenn man statt der Coordinaten ihre Werthe setzt

$$\begin{aligned} R.\cos A.\cos H &= R'.\cos A'.\cos H' \\ R.\sin A.\cos H &= R'.\sin A'.\cos H' + \rho.\sin\mu. \\ R.\sin H &= R'.\sin H' + \rho.\cos\mu. \end{aligned}$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt die Quadrate, so kommt, wenn man

$$\sin A'\cos H'\sin\mu + \sin H'.\cos\mu = \cos\Lambda$$

der Kürze wegen setzt,

$$RR = R'R' + 2R'\rho.\cos\Lambda + \rho\rho.$$

$$R' + \rho\cos\Lambda = \sqrt{RR - \rho\rho.\sin\Lambda^2},$$

oder wenn man alle das Quadrat übersteigenden Potenzen von $\frac{\rho}{R}$ vernachlässigt, und $\frac{\rho}{R} = \sin\Pi$ nimmt, und dann

$$\sin\Pi.\cos\Lambda + \tfrac{1}{2}\sin\Pi^2\sin\Lambda^2 = Q$$

setzt, so erhält man

$$R' = R\,(1 - Q).$$

Substituirt man diesen Werth in obige drei Gleichungen, so geben dieselben

$$\begin{aligned} \cos A.\cos H &= \cos A'.\cos H'(1-Q) \\ \sin A.\cos H &= \sin A'.\cos H'(1-Q) + \sin\Pi.\sin\mu \quad (a) \\ \sin H &= \sin H'(1-Q) + \sin\Pi.\cos\mu. \end{aligned}$$

Setzt man auf gleiche Weise

$$\sin a'.\cos h'.\sin\mu + \sin h'.\cos\mu = \cos\lambda$$

$$\rho = r.\sin\varpi$$

$$\sin\varpi.\cos\lambda + \tfrac{1}{2}\sin\varpi^2.\sin\lambda^2 = q$$

so erhält man für die Sonne

$$\begin{aligned} \cos a.\cos h &= \cos a'.\cos h'(1-q) \\ \sin a.\cos h &= \sin a'.\cos h'(1-q) + \sin\varpi.\sin\mu \quad (b) \\ \sin h &= \sin h'(1-q) + \sin\varpi.\cos\mu. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (a) resp. mit den Gleichungen (b), so kommt, da wir die Producte $Q.q$, $\sin\varpi.\sin\Pi$, $q.\sin\Pi$, $Q.\sin\varpi$ vernachlässigen können

$$\cos A.\cos H.\cos a.\cos h = \cos A'.\cos H'.\cos a'\cos h'(1-Q-q)$$
$$\sin A.\cos H.\sin a.\cos h = \sin A'.\cos H'.\sin a'.\cos h'(1-Q-q)$$
$$+\sin \Pi.\sin \mu.\sin a'\cos h'$$
$$+\sin \varpi.\sin \mu.\sin N.\cos H'$$
$$\sin H.\sin h = \sin H'.\sin h'(1-Q-q)$$
$$+\sin \Pi.\cos \mu.\sin h'$$
$$+\sin \varpi.\cos \mu.\sin H'.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so kommt mit Berücksichtigung der für $\cos S$, $\cos S'$ in vorigem Paragraph gegebenen Werthe

$$\cos S = \cos S' - (Q+q)\cos S'$$
$$+\sin \Pi.\sin \mu.\sin a'\cos h'$$
$$+\sin \varpi.\sin \mu.\sin A'.\cos H'$$
$$+\sin \Pi.\cos \mu.\sin h'$$
$$+\sin \varpi.\sin \mu.\sin H'$$
$$= \cos S' - (Q+q)\cos S' + \sin \Pi.\cos \lambda$$
$$+\sin \varpi.\cos \Lambda.$$

Hat man statt der Sonne einen Stern gewählt, so ist $\sin \varpi$ so wie q Null. Die Winkel A', a' finden sich durch die Formeln

$$\sin Z = \frac{\cos \delta.\sin t}{\cos H'}, \quad A' = 90 \pm Z.$$

Das obere Zeichen gilt für einen westlichen, das untere für einen östlichen Stundenwinkel $= t$; δ ist die Declination, und Z wie man leicht sieht das Azimuth. Man erhält auch wegen der Kleinheit des Winkels μ

$$\Lambda = 90 - H' + \mu.\sin A'$$
$$\lambda = 90 - h' + \mu.\sin a'$$

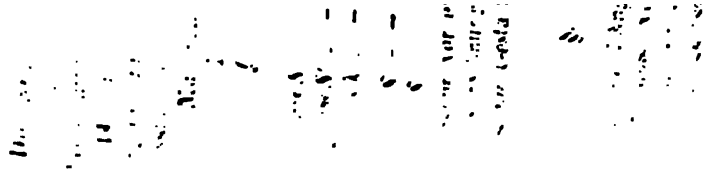
wo man μ in Secunden ausdrücken kann.

§. 524.

Wir wollen diese Formeln auf das §. 520. für die Kugelgestalt der Erde berechnete Beispiel anwenden. Es ist daselbst

$$H^\circ = 27^\circ\,41'\,44''1$$
$$h^\circ = 42.\,46.\,52,1$$
$$S^\circ = 26.\,34.\,06,4$$
$$S' = 26.\,34.\,48,5$$

wo S' der von der Strahlenbrechung befreiete Abstand ist.



dieser Art ganz verschweigt. Da aber
ıng der Länge zur See für die Schifffahrt
ser Wichtigkeit war, so zog die Auflö-
Aufgabe die Aufmerksamkeit der Regie-
sich, und Spanien, die Niederlande,
und England sahen sich bewogen, Beloh-
die Erfinder einer zweckmässigen Metho-
tzen. Es wurde jedoch erst dann möglich
ge Resultate aus der Messung der Monds-
n abzuleiten, nachdem Newton durch die
ıg des allgemeinen Gesetzes der Anziehung,
gung des Mondes genauer kennen gelehrt
ie wegen ihrer verwickelten Beschaffenheit
hülfe der Theorie, nie mit Sicherheit hätten
lt werden können. Hierzu kam noch in
ıer Rücksicht die im Jahre 1730 von Had-
ıachte Erfindung des Spiegelsextanten, welcher
sungen dieser Art das passlichste Instrument
d den wir nachher ausführlicher beschreiben
. Der erste Hauptschritt zur allgemeinern
itung dieser Methode der Längenbestimmung
durch die Mondstafeln des berühmten Tobias
r bewirkt, dem dafür von England eine Be-
ıg von fünftausend Pfund Sterling ertheilt wur-
ıd um die Vergleichung der Beobachtungen mit
afeln zu erleichtern, giebt der Nautical Al-
ıc seit 1767, und die Connoissance des
seit 1774 die Entfernungen des Mondes von
Sonne und einigen Hauptsternen, von drei zu
Stunden im Voraus berechnet an.

§. 526.

Wenn ein Lichtstrahl auf einen Spiegel fällt, so
derselbe so zurückgeworfen, dass der zurück-
orfene Strahl mit dem im Einfallspunkte auf dem
gel errichteten Perpendikel denselben Winkel
t, als der einfallende Strahl mit demselben Ein-
loth; ausserdem liegen der einfallende Strahl, das
allsloth, und der zurückgeworfene Strahl, in einer
derselben Ebene. Es seyen daher *AB*, *CD* die
chschnitte zweier ebenen Spiegel mit der auf bei-
senkrecht stehenden Ebene des Papiers, *EF* ein

auf den Spiegel AB in F auffallender Strahl, FK das Einfallsloth, $\angle KFG = \angle EFK$, so ist FG der vom ersten Spiegel zurückgeworfene Strahl; im Einfallspunkte G sey auf dem zweiten Spiegel das Einfallsloth GL errichtet, und $\angle LGH = \angle FGL$, so ist GH der Weg des vom zweiten Spiegel zurückgeworfenen Strahles. Man verlängere den einfallenden Strahl, bis er den zum zweiten Male zurückgeworfenen in H durchschneidet, so erhält man ein Dreieck FGH; in diesem hat man

$$FHG = EFG - FGH$$
$$= 2KFG - 2FGL.$$

Die beiden Einfallslothe bilden, wenn sie gehörig verlängert werden, ebenfalls ein Dreieck FLG, in welchem $FLG = KFG - FGL$ wird. Hieraus folgt sogleich

$$FHG = 2FLG,$$

und da der Winkel, den die Einfallslothe mit einander bilden, nothwendig eben so gross ist als der Winkel der Ebenen auf denen sie errichtet sind, so giebt der Winkel FLG die Neigung der beiden Spiegel gegen einander an, und wir schliessen hieraus, dass wenn ein Strahl von zwei Spiegeln, die auf der Ebene in welcher der Strahl und ein Einfallsloth liegt, senkrecht stehen, zurückgeworfen wird, so ist der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem zweimal reflectirten bildet, doppelt so gross, als der Neigungswinkel der beiden Spiegel gegen einander.

§. 527.

Bringt man nun auf einen getheilten Gradbogen ABC (fig. 19.), dessen Mittelpunkt sich in B befindet, zwei Spiegel an, einen grössern DE der ganz mit Folie belegt, und mit dem Lineal BH (der Alhidade) welches sich um den Mittelpunkt B drehen lässt, fest verbunden ist, und einen kleinern FG welcher eine unveränderliche Lage hat, aber blos auf der unteren Hälfte foliirt ist, damit man durch den obern Theil die dahinter befindlichen Gegenstände zu Gesichte bekommen kann, so erhält man ein Instrument, welches der Spiegelsextant heisst und zuerst von Hadley angegeben wurde. Beide Spiegel müssen senkrecht

auf der Ebene des Kreisausschnitts stehen, so wie auch die nach dem unbeweglichen kleinern Spiegel gerichtete Axe des Fernrohrs KL, welches man des deutlichern Sehens der Gegenstände und ihrer durch die Spiegel zurückgeworfenen Bilder wegen am Sextanten anbringt, mit der Ebene des Sextanten parallel liegen muss. Um nun zu zeigen wie man vermittelst eines solchen Instruments den Winkel, welchen die von zwei Gegenständen nach dem Auge gezogenen Gesichtslinien mit einander bilden, d. h. ihren scheinbaren Abstand von einander messen kann, sey (fig. 20.) FG der kleine Spiegel, KL eine mit einer Oeffnung versehene Platte, die man an die Stelle des Fernrohrs setzen kann, in O das Auge, welches den Gegenstand M durch den unbelegten Theil des Spiegels FG nach der Richtung MO sieht; der grössere Spiegel DE werde nun um B so lange gedreht, bis der auf ihn fallende Strahl MB nach BG zurückgeworfen, und von dem belegten untern Theile des kleinern Spiegels FG von neuem nach GO reflectirt wird, dann wird sowohl der Gegenstand M selbst, als auch sein durch zweimalige Zurückwerfung entstandenes Bild nach der Richtung MO gesehen werden. Man bemerke die Anzahl Grade, Minuten u. s. w., welche die am Spiegel DE angebrachte Alhidade auf dem Gradbogen zeigt. Nun sey N ein zweiter Gegenstand der einen Strahl NB auf den grössern Spiegel wirft; dreht man denselben in die Lage $D'E'$, so dass der Winkel $D'BN = GBE'$ wird, so verfolgt der in B zurückgeworfene Strahl NB den Weg BG, wo er in G von neuem reflectirt in der geraden Linie GO wie vom Gegenstande M ins Auge O gelangt. Bemerkt man in dieser Lage des Spiegels die Anzahl Grade u. s. w., welche die Alhidade angiebt, so zeigt der Unterschied dieser Angabe von der in der frühern Lage den Winkel an, um welchen der Spiegel gedreht worden ist, d. h. den Winkel DBD'. Sind ferner BP, BP' die Einfallslothe auf den grössern Spiegel in seine beiden Lagen ED, $E'D'$, so ist der Winkel PBP' bekanntlich gleich dem Winkel DBD'. Vermöge des erwähnten Gesetzes der Zurückwerfung des Lichts ist auch

$$\angle NBG = 2\angle GBP$$
$$\angle MBG = 2\angle GBP$$
$$NBG - MBG = 2GBP' - 2GBP.$$

Es ist aber, wie man aus der Figur sieht

$$NBG - MBG = MBN$$
$$GBP' - GBP = PBP'$$
$$MBN = 2PBP' = 2DBD',$$

folglich ist der Winkel, um welchen der Spiegel gedreht wurde, halb so gross als der scheinbare Abstand MBN der beiden Gegenstände. Ist daher der Gradbogen nach der gewöhnlichen Art getheilt, so giebt der doppelte auf dem Gradbogen in beiden Lagen der Alhidade abgelesene Winkel den gesuchten Winkel an. Um aber diese Verdoppelung zu vermeiden, pflegt man die Theilung nur halb so gross zu machen, so dass der Vollkreis nach dieser Art zu theilen 720° erhalten würde. Die angeführte doppelte Ablesung auf den Gradbogen kann man dadurch vermeiden, wenn man den Spiegel FG durch die an denselben befindlichen Schrauben gleich so stellt, dass wenn der direct gesehene Gegenstand M mit seinem durch doppelte Zurückwerfung gesehenem Bilde zusammenfällt, die Alhidade auf Null der Theilung steht. Dies findet gewöhnlich schon sehr nahe statt, und wenn man die Abweichung der Stellung vom Nullpunkte der Theilung nicht völlig corrigiren

er Fehler durch den halben Unterschied beider Win-
el ausgedrückt.

§. 528.

Bei der Anwendung des Spiegelsextanten zur
Messung von Höhen der Sterne oder der Sonne über
ein Horizont, bedient man sich zur See des natür-
ichen Horizontes den das Meer an der Gränze des
Gesichtskreises darbietet; allein bei Messungen der
Höhen auf dem Lande, wo dem Beobachter dieses
Hülfsmittel entgeht, wenn er sich nicht auf weit aus-
gedehnten Ebenen die der Meeresfläche gleichen, wie
dies in Südamerica und den Sandwüsten Africas der
Fall ist, befindet, muss man sich eines künstlichen
Horizonts bedienen. Dieses erhält man dadurch, dass
man irgend eine Flüssigkeit, am besten Quecksilber,
in ein weites Gefäss gisst, da ihre Oberflächen durch
die Wirkung der Schwere von selbst eine völlig ho-
rizontale Lage annehmen. Es sey z. B. AB die
Oberfläche (fig. 21.) der Flüssigkeit, in M der Ge-
genstand, in O der Beobachter, MN ein auf die Ober-
fläche der Flüssigkeit fallender und nach NO zurück-
geworfener Strahl, so misst man den Winkel MON,
den die nach dem Beobachter vom Gegenstande ge-
zogene Gesichtslinie mit dem zurückgeworfenen Strahl
macht. Man hat im Dreieck MNO

$$MN : MO = \sin MON : \sin MNO.$$

Vermöge des Gesetzes der Zurückwerfung ist aber

$$MNA = ONB$$
$$MNO = 180° - 2MNA$$

also lässt sich vorige Proportion auch so schreiben:

$$MN : MO = \sin MON : \sin 2MNA.$$

Nähert sich also das Verhältniss der Entfernun-
gen MN, MO der Einheit, wie dieses bei der Beob-
achtung aller Himmelskörper statt findet, da bei die-
sen die Entfernung des Beobachters vom künstlichen
Horizont gegen die Entfernung des Himmelskörpers
von demselben eine unendlich kleine Grösse ist, so
wird auch das Verhältniss der Sinus von MON und
MNA sich der Einheit nähern, und für die Him-
melskörper kann man ohne Fehler $MON = 2MNA$
Nun ist aber der Winkel MNA nichts anders

Der gebrochene Strahl tritt in L wieder aus dem Glase in die Luft über, und nimmt den Weg LN wo er in N die Flüssigkeit trifft; ist daher PLO das an diesem Punkte statt findende Einfallsloth, so hat man

$$\sin HLP : \sin OLN = 2 : 3.$$

Nun ist aber, wie man leicht sieht, wenn man die beiden Einfallslothe gehörig verlängert

$$HLP = MHL + \varepsilon$$
$$OLN = CLN - 90$$
$$= DNL + LND - 90$$

und wenn man den Winkel DNL durch h' bezeichnet, und bedenkt, dass $LDN = CDF = 45° + \varepsilon$ ist

$$OLN = h' + \varepsilon - 45°.$$

Setzt man diese Werthe in die Proportion

$$\sin HLP : \sin OLN = 2 : 3$$

so erhält man

$$\sin(MHL + \varepsilon) : \sin(h' + \varepsilon - 45) = 2 : 3.$$

Entwickelt man diese Proportion, indem man die höhern Potenzen des Winkels ε vernachlässigt, so kommt

$$\sin MHL + \varepsilon . \cos MHL = \tfrac{2}{3} \sin(h' - 45) + \tfrac{2}{3} \varepsilon . \cos(h' - 45)$$

und wenn man hiervon die früher gefundene in eine Gleichung verwandelte Proportion abzieht, nämlich diese:

$$\sin MHL = \tfrac{2}{3} \sin(h - 45)$$

so bleibt

$$\varepsilon . \cos MHL = \tfrac{2}{3} \sin(h' - 45) + \tfrac{2}{3} \cos(h' - 45) . \varepsilon - \tfrac{2}{3} \sin(h - 45).$$

Da ferner die Winkel h', h unter den gemachten Voraussetzungen auch nur wenig von einander abweichen, so darf man $h' = h + \delta h$ setzen, wo die höhern Potenzen von δh so wie das Product $\varepsilon . \delta h$ vernachlässigt werden können. Hierdurch wird dann

$$\varepsilon . \cos MHL = \tfrac{2}{3} \cos(h - 45) [\delta h + \varepsilon].$$

Aus der Gleichung $\sin MHL = \frac{1}{3} \sin(h - 45)$ ergiebt sich sogleich

$$\cos MHL = \sqrt{[1 - \tfrac{1}{9} \sin(h - 45)^2]}$$

also auch wenn man diesen Werth in vorige Gleichung substituirt

$$\delta h = \varepsilon \left[\tfrac{2}{3} \sqrt{[1 + \tfrac{1}{9} \tang(h - 45)^2]} - 1\right]$$

indem man nämlich

nimmt. Die obige Gleichung wird daher, wenn man bedenkt, dass das Product $\varepsilon' x$ vernachlässigt werden muss $x = (\varepsilon' - \varepsilon)(1 - \frac{1}{2}a)$
also der Winkel, den der zuletzt ausfahrende Strahl mit der Oberfläche der Flüssigkeit bildet h°
$= h + (\varepsilon' - \varepsilon)(1 - \frac{1}{2}a)$.

Da wir den Gegenstand als unendlich entfernt gegen den Abstand des Auges vom künstlichen Horizont angenommen haben, so wird der Winkel, den die vom Gegenstande nach dem Beobachter gezogene Linie mit dem Horizont macht, auch durch h ausgedrückt, also beträgt der Winkel, den der zurückgeworfene Strahl mit dem direct vom Gegenstande kommenden macht

$$2h + (\varepsilon' - \varepsilon)(1 - \tfrac{1}{2}a),$$

den man für die doppelte Höhe annehmen muss. Die einfache Höhe wird daher

$$h + (\varepsilon' - \varepsilon)\left(\frac{2 - 3a}{4}\right)$$

folglich wird dieselbe durch den Mangel des Parallelismus der Seitenflächen um den Winkel

$$(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\frac{2 - 3a}{4}\right)$$

vergrössert. Man kann diesen Fehler dadurch vermeiden, dass man die Beobachtung wiederholt, nachdem das Dach umgedreht worden ist, wodurch die Glasplatte, deren Seitenflächen die Neigung ε' besitzen, dem vom Gegenstande einfallendem Lichte zugewendet wird. Denn man hat dann die Höhe

$$h + (\varepsilon - \varepsilon')\left(\frac{2 - 3a}{4}\right).$$

welches zu der zuerst beobachteten

$$h + (\varepsilon' - \varepsilon)\left(\frac{2 - 3a}{4}\right)$$

addirt, blos $2h$ giebt, so dass man um die wahre Höhe zu erhalten, nur aus den beiden durch fehlerhafte Glasplatten gemachten Beobachtungen, das arithmetische Mittel zu nehmen braucht.

Man darf jedoch dabei nicht vergessen, bei der Beobachtung solcher Gegenstände, deren Höhe veränderlich ist, wie dies bei allen Himmelskörpern statt

findet, die zweite beobachtete Höhe erst nach den so oft angegebenen Methoden vermittelst der zwischen beiden Beobachtungen verflossenen Zeit, auf eine mit der ersten gleichzeitig genommene zu reduciren. Zugleich bestimmt sich aus einer solchen Beobachtung die Grösse $\varepsilon' - \varepsilon$, die man dann für alle folgenden Beobachtungen als bekannt ansehen kann, und hierdurch die Umkehrung des gläsernen Daches vermeidet.

Man erhält einen künstlichen Horizont auch dadurch, dass man eine sehr eben geschliffene und mit genau parallelen Seiten versehene Glasplatte auf dem Quecksilber schwimmen lässt, die auf diese Art einen gewöhnlichen mit Quecksilberfolie belegten Glasspiegel darbietet. Diese Art den künstlichen Horizont zu bilden würde sehr vortheilhaft seyn, da alle wellenförmigen Bewegungen der Oberfläche, die das Quecksilber vermöge des Luftzuges oder anderer Erschütterungen annehmen könnte, durch die aufliegende Glasplatte verhindert werden; allein man kann selten gewiss seyn, dass die reflectirende Glasfläche eine wirklich genaue horizontale Lage besitzt, wenn auch die einzelnen Seitenflächen der Glasplatte völlig eben und unter einander parallel sind, da sehr leicht Luftblasen zwischen das Quecksilber und die aufgelegte Glasplatte eintreten können, und ausserdem das Glas selten von einer gleichförmigen Dichtigkeit ist, welcher Umstand doch sehr erforderlich ist, wenn eine ganz vollkommen geschliffene Glasplatte eine horizontale Lage annehmen soll, sobald sie in einer Flüssigkeit schwimmt. Man kann freilich auch hierbei den im gemessenen Winkel durch die nicht horizontale Lage der reflectirenden Fläche entstehenden Fehler dadurch aufheben, dass man das ganze Gefäss mit dem Quecksilber und der darauf schwimmenden Glasplatte umdreht, und den Winkel von neuem beobachtet, den der reflectirte Strahl mit dem vom Gegenstande direct herkommenden bildet. Nimmt man dann aus beiden Messungen das arithmetische Mittel, so erhält man die wahre von dem Fehler des unrichtigen künstlichen Horizontes befreiete Höhe.

Endlich kann man einen künstlichen Horizont auch noch dadurch darstellen, dass man einen ge-

wöhnlichen Planspiegel vermittelst einer Libelle in horizontale Lage bringt. Gewöhnlich bedient man sich dazu einer runden Platte aus rothem oder blauem Glase, die auf der einen Seite matt geschliffen ist, und auf einem Teller von Holz oder Marmor liegt, auf dem sich die Glasplatte durch Hülfe dreier Schrauben und der Libelle in eine horizontale Lage bringen lässt. Da nämlich eine Ebene horizontal ist, wenn zwei in ihr gezogene Linien eine horizontale Lage haben, so braucht man nur die Libelle zuerst so auf die Glasplatte zu setzen, dass eine durch zwei Schrauben gezogene Linie mit der Axe der Libelle parallel läuft. Bringt man dann vermittelst dieser zwei Schrauben die Luftblase der Libelle genau in die Mitte, so ist man sicher, dass diese Linie sowohl als auch jede mit ihr in der Ebene parallel gezogene, eine genaue horizontale Lage hat. Setzt man hierauf die Libelle in eine gegen die erste Lage senkrechte Stellung auf die Glasplatte, so zeigt die Luftblase ob die Ebene schon horizontal ist oder nicht. Befindet sich die Luftblase noch nicht in der Mitte der Libelle, so senkt oder hebt man vermittelst der dritten Schraube die Glasplatte so lange, bis die Luftblase in die Mitte tritt, wodurch die Ebene dann in eine horizontale Lage gebracht seyn wird. Es ist aber hierbei sehr anzurathen, dass man, vorzüglich bei der Beobachtung von Sonnenhöhen, öfters untersucht, ob die Platte noch ihre horizontale Lage beibehalten hat, weil durch die Erwärmung derselben vermittelst der Sonnenstrahlen, eine Ausdehnung und öfters eine Aenderung ihrer Lage hervorgebracht wird.

§. 529.

Wir wollen nun noch einige Untersuchungen über die Bestimmung der Lage der Oerter auf der Erde durch geodätische Operationen anstellen, und dabei vorzüglich die eigentliche Gradmessung berücksichtigen. Um ein Stück eines Meridianbogens zu bestimmen, würde es am einfachsten seyn, die Entfernung zwischen zwei Oertern, die einerlei geographische Länge haben, wirklich mit Stäben auszumessen, allein diese Methode würde bei grossen Stücken des

Meridians unausführbar seyn, da es hierzu durchaus erforderlich ist, dass man von dem einen Endpunkte des Bogens den andern sehen könnte. Man muss daher einen anderen Weg einschlagen, der darin besteht, dass man die in der Nähe des durch den ersten Anfangspunkt der Messung gezogenen Meridians befindlichen Punkte durch Dreiecke mit einander verbindet, bis die ganze Reihe von Dreiecken sich über einen beträchtlichen Theil des Meridians erstreckt. Wäre z. B. A (fig. 23.) der nördlichste Anfangspunkt der Messung, und F der südlichste, AM der durch A gezogene Meridian, so kann man A mit F durch die Dreiecke ABC, BCD, CDE, DEF verbinden; ist dann in dem Dreieck ABC eine Seite AB nebst den Winkeln der Dreiecke gemessen, so kann man daraus nach und nach alle einzelnen Seiten berechnen, wodurch die Entfernungen aller einzelnen Punkte von einander bekannt werden. Eigentlich hätte man nur nöthig in jedem Dreieck blos zwei Winkel zu messen, allein es ist besser, dass man wirklich alle drei misst, damit man die bei der Messung etwa begangenen Fehler leichter entdecken und verbessern kann. Denkt man sich dann durch die Punkte C, E, F die Parallelkreise CC', EE', FF' gezogen, so lassen sich dieselben vermöge des gemessenen Azimuths berechnen, und ihre Summe

$$CC' + EE' + FF' = AF'$$

giebt dann die Länge des Meridianbogens der zwischen zwei Oertern enthalten ist, von denen der eine die in A, der andere die in F statt findende Polhöhe hat. Dass beide Oerter A und F nicht unter einerlei Meridian liegen, thut nichts zur Sache, denn der Punkt F', in welchem der durch F gelegte Parallelkreis den Meridian AM schneidet, muss nothwendigerweise dieselbe Polhöhe besitzen, als der Punkt F.

§. 530.

Wir wollen nun annehmen, es seyen in dem Dreieck ABC die drei Winkel gemessen, nebst der Seite $BC = a$; die drei Winkel bezeichnen wir durch die an die Dreieckspunkte gesetzten Buchstaben, und die Seiten durch die kleinen Buchstaben, welche den

gegenüberstehenden Seiten correspondiren. Wegen der Kleinheit des Dreiecks gegen die ganze Erdoberfläche genommen, wird es uns erlaubt seyn, jedes einzelne Dreieck als ein sphärisches zu betrachten, und nach dieser Voraussetzung die Rechnung zu führen. Nennt man dann den Halbmesser der Kugel, von welcher dieses Dreieck einen Theil ausmacht, r, so hat man nach den bekannten sphärisch-trigonometrischen Formeln zur Berechnung der Länge b und c die Formeln

$$\sin\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r}\cdot\frac{\sin C}{\sin A},$$

$$\sin\frac{b}{r} = \sin\frac{a}{r}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Da aber das Verhältniss $\frac{c}{r}$, $\frac{a}{r}$ immer sehr klein ist, so darf man mit Vernachlässigung aller Potenzen die den Cubus übersteigen

$$\frac{c}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{r^3} = \sin\frac{c}{r},$$

$$\frac{a}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{a^3}{r^3} = \sin\frac{a}{r}$$

setzen, so dass die erste Formel auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{c}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{r^3} = \frac{a}{r}\cdot\frac{\sin C}{\sin A} - \tfrac{1}{6}\cdot\frac{a^3}{r^3}\cdot\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Man nehme nun

$$c = a\cdot\frac{\sin C}{\sin A} - a^3\frac{u}{r^3}$$

wo u ein noch zu bestimmender Coefficient ist, der weder von c noch von a abhängt. Durch diese Annahme wird

$$\frac{c}{r} - \tfrac{1}{6}\cdot\frac{c^3}{r^3} = \frac{a}{r}\cdot\frac{\sin C}{\sin A} - a^3\frac{u}{r^3} - \tfrac{1}{6}\frac{a^3}{r^3}\cdot\frac{\sin C^3}{\sin A^3}$$

und da der hinter dem Gleichheitszeichen stehende Ausdruck auch

Aus der sphärischen Trigonometrie ist ferner bekannt, dass der Ueberschuss der Summe der drei Winkel des Dreiecks über 180°, oder der sphärische Excess immer sich zu zwei rechten Winkeln verhält, wie die Fläche des Dreiecks zum Quadranten der Kugeloberfläche. Bezeichnet man also die Fläche des Dreiecks durch Δ, und bedenkt, dass der Quadrant der Kugelfläche der Fläche des grössten Kreises derselben, also πrr gleich ist, so hat man die Proportion

$$A + B + C - \pi : \pi = \Delta : \pi rr$$

also hieraus

$$A + B + C - \pi = \frac{\Delta}{rr}.$$

Sucht man nun aber den Inhalt des Dreiecks ABC aus der Seite a und den Winkeln A, C, indem man dasselbe als geradlinigt betrachtet, so kommt

$$\Delta = \frac{aa}{2} \cdot \frac{\sin(A+C) \cdot \sin C}{\sin A}$$

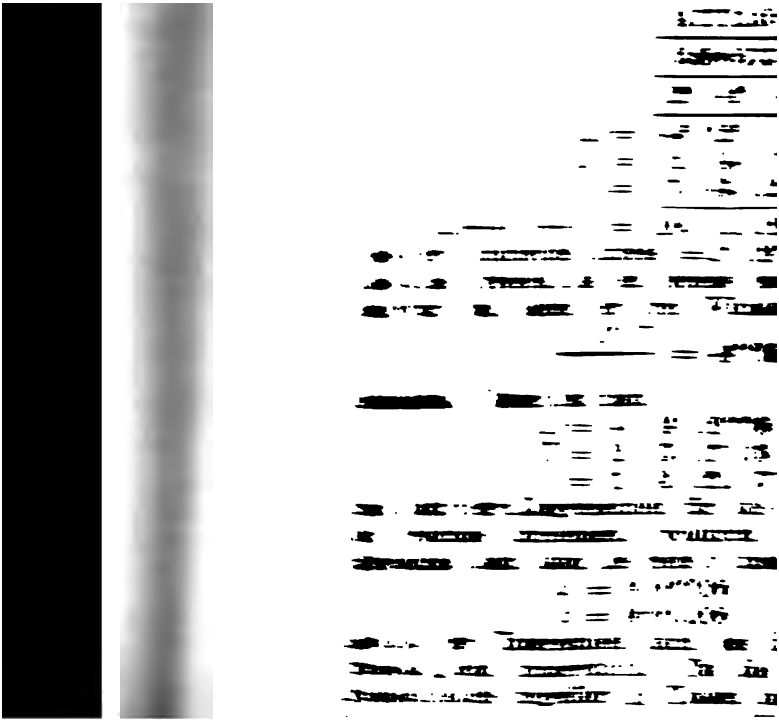
$$A + B + C - \pi = \frac{aa}{2rr} \cdot \frac{\sin(A+C) \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Man sieht hieraus, dass die oben durch ε bezeichnete Grösse nichts anders als $\frac{A+B+C-\pi}{3}$ ist, also den dritten Theil des sphärischen Excesses ausdrückt. Man erhält hieraus folgende Regel: Um die Seiten eines sphärischen Dreiecks, dessen Dimensionen gegen die ganze Kugeloberfläche nur klein sind, aus einer gemessenen zu finden, behandle man dasselbe als ein geradlinigtes ebenes Dreieck, indem man von jedem der Winkel den dritten Theil des sphärischen Excesses abzieht. Diese Regel ist zuerst von Legendre angegeben worden.

§. 531.

Um zu zeigen wie diese Regel mit der genauen Berechnung übereinstimmt, wollen wir ein Dreieck fingiren, dessen Seiten bedeutend grösser sind, als je eine bei allen geodätischen Operationen vorkommen kann; es sey nämlich

$$a = 2°, \quad b = 2° 30', \quad c = 2° 40'.$$



Meridiane AP, CP durchschneiden (fig. 23.), so hat man im Dreieck PAC die Relation

$$\cos PC = \cos AP . \cos AC + \sin AP . \sin AC . \cos PAC.$$

Nun sey die Polhöhe von A durch p ausgedrückt, so wird $AP = 90° - p$, $AC = \frac{b}{r}$, wo b die Länge der Seite AC, und r den Halbmesser der Kugel, auf welcher das Dreieck PAC liegt, in demselben Maasse angegeben anzeigt, $PAC = 180 - N$; ferner bezeichne man die Polhöhe des Ortes C durch $p - \frac{m}{r}$, indem wir annehmen dass C südlicher als A liegt, so wird $PC = 90° - p + \frac{m}{r}$, und der Unterschied $PC - AP = \frac{m}{r}$ giebt den Bogen AC' des Meridians an, wenn man den Halbmesser der Kugel als die Einheit ansieht. Eben so wird dann m selbst die lineare Länge in demselben Maasse, in welchem die Seiten des Dreiecks angegeben sind, des Meridianbogens AC' ausdrücken, also die verlangte reducirte Länge gefunden seyn. Setzt man alle diese angegebenen Werthe in die Gleichung

$$\cos PC = \cos AP . \cos AC + \sin AP . \sin AC . PAC$$

so kommt

$$\sin(p - \frac{m}{r}) = \sin p . \cos\frac{b}{r} - \cos p . \sin\frac{b}{r} \cos N$$

oder wenn man entwickelt, und die Potenzen welche das Quadrat von $\frac{m}{r}$ und $\frac{b}{r}$ übersteigen, vernachlässigt

$$\sin p \,(1 - \frac{mm}{2rr}) - \frac{m}{r}\cos p = \sin p \,(1 - \frac{bb}{2rr}) - \frac{b}{r}\cos p . \cos N.$$

Man setze nun

$$m = b \cos N + \frac{bb}{r} v$$

wo v ein von m und b unabhängiger Coefficient ist, und substituire diesen Werth in obige Gleichung zwischen m und b, die sich auch so schreiben lässt:

$+\frac{m}{r}) = r.\ cos(p - \frac{m}{r})$, also die lineare Länge des Bogens CC, die wir durch n bezeichnen wollen

$$n = a.\ r.\ cos(p - \frac{m}{r}).$$

Nun verhält sich aber im Dreieck APC

$$sin\,APC : sin\,AC = sin\,PAC : sin\,PC$$

oder

$$sin\,a : sin\,\frac{b}{r} = sin(180 - N) : cos(p - \frac{m}{r})$$

folglich

$$sin\,a = sin\,\frac{b}{r} \cdot \frac{sin\,N}{cos(p - \frac{m}{r})}$$

oder wenn man $sin\,a$ und $sin\,\frac{b}{r}$ entwickelt,

$$a - \tfrac{1}{6}a^3 = \left(\frac{b}{r} - \tfrac{1}{6}\cdot\frac{b^3}{r^3}\right)\cdot\frac{sin\,N}{cos(p - \frac{m}{r})}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$a = \frac{b}{r}\cdot\frac{sin\,N}{cos(p - \frac{m}{r})} + \tfrac{1}{6}\frac{b^3}{r^3}\cdot\frac{sin\,N}{cos(p - \frac{m}{r})}\left(\frac{sin\,N^2}{cos(p - \frac{m}{r})^2} - 1\right)$$

also auch, da $n = ar.\ cos(p - \frac{m}{r})$ ist

$$n = b.\ sin\,N + \tfrac{1}{6}\,b\,\frac{bb}{rr}\,sin\,N\left(\frac{sin\,N^2}{cos(p - \frac{m}{r})^2} - 1\right).$$

§. 534.

Das Azimuth der Seiten des Dreiecks gegen die durch die andern Winkelpunkte gelegten Meridiane, werden auf folgende Art berechnet. Da die Verlän-

Hieraus ergiebt sich

$$(N-N') + \tfrac{1}{3} tang\, N.\, (N-N')^2 = \frac{m}{r} tang\, p.\, tang\, N - \frac{mm}{rr} tang\, p^2\, tang\, N - \tfrac{1}{3}\frac{mm}{rr} tang\, N.$$

Setzt man hierin statt $\frac{m}{r}$ seinen Werth (§. 532.)

$$\frac{b}{r} cos\, N + \frac{bb}{2rr} tang\, p.\, sin\, N^2$$

so kommt

$$(N-N') + \tfrac{1}{3} tang\, N.\, (N-N')^2 = \frac{b}{r} tang\, p.\, sin\, N + \frac{bb}{2rr} tang\, p^2\, sin\, N^2\, tang\, N - \frac{bb}{rr} tang\, p^2\, cos\, N^2\, tang\, N - \tfrac{1}{3}\frac{bb}{rr} cos\, N^2\, tang\, N.$$

Nun ist aber schon früher (§. 532.) gefunden worden, dass:

$$\delta N = \frac{b}{2r} tang\, p.\, sin\, N$$

$$\frac{b}{r} = 2\delta N \frac{cot\, p}{sin\, N}$$

$$\frac{bb}{rr} = 4\delta N^2.\, \frac{cot\, p^2}{sin\, N^2}$$

und durch Einführung dieses Werthes wird vorige Gleichung

$$(N-N') + \tfrac{1}{3} tang(N-N')^2 = 2\delta N + 2\delta N^2\, (tang\, N - 2\, cot\, N - cot\, N.\, cot\, p^2).$$

Nimmt man daher

$$N - N' = 2\delta N + \lambda \delta N^2,$$

so wird zur Bestimmung von λ die Gleichung statt finden

$$\lambda = -2\,(cot\, p^2 + 2)\, cot\, N$$

und man erhält endlich

$$N - N' = 2\delta N - 2\delta N^2.\, cot\, N\, (2 + cot\, p^2).$$

wodurch die Differenz der Azimuthe gefunden ist.

§. 535.

Wir wollen als numerisches Beispiel ein Dreieck wählen, welches aus der vom Herrn Hofr. Gauss ausgeführten Gradmessung entnommen ist. Die drei Winkelpunkte seyen (fig. 24.) B, H, I, wo B den Brocken, H den Hohenhagen, und I den Inselberg bedeutet; HM ist der vom Hohenhagen nach Süden gezogene Meridian, und das ganze Dreieck liegt auf der östlichen Seite desselben. Die Messungen gaben für die Winkel, das Azimuth und die Seite BH folgende Resultate:

$$\begin{aligned} \text{Winkel } B &= 53^\circ\ 6'\ 45''63 \\ H &= 86.\ 13.\ 58,43 \\ I &= 40.\ 39.\ 30,14 \\ BHN &= 58.\ 9.\ 2,39 \\ BH &= 35503,14 \text{ Toisen} \\ \log BH &= 4.5502668. \end{aligned}$$

Die Summe der drei Winkel des Dreiecks beträgt

$$180^\circ\ 0'\ 14''20,$$

also ist der sphärische Excess $= 14''20$, und wenn man das Dreieck als ein ebenes behandeln will, so muss von jedem der angegebenen Winkel $\frac{14''20}{3} = 4''73$ abgezogen werden. Hierdurch erhält man die reducirten Winkel

$$\begin{aligned} B &= 53^\circ\ 6'\ 40''90 \\ H &= 86.\ 13.\ 53,70 \\ I &= 40.\ 39.\ 25,41. \end{aligned}$$

Bezeichnet man dann die den Winkeln gegenüberstehenden Seiten durch die kleinen Buchstaben, so dass

$$BH = i, \quad BI = h, \quad IH = b$$

wird, so erhält man

$$h = \frac{i.\ \sin H}{\sin I}, \qquad b = \frac{i.\ \sin B}{\sin I};$$

$$\begin{aligned} \log i &= 4.5502668 \\ \sin H &= 9.9990600 \\ C.\ \sin I &= 0.1860656 \\ &\overline{\quad 4.7353924 = \log h} \\ h &= 54374,14 \text{ Toisen} \end{aligned}$$

$$\log i = 4.5502668$$
$$\sin B = 9.9029834$$
$$C.\ \sin I = 0.1860656$$
$$4.6393158 = \log b$$
$$b = 43582{,}86 \text{ Toisen.}$$

Man hat also die Entfernungen:

Hohenhagen nach Brocken = 35503,14 Toisen
Brocken nach Inselberg = 54364,14 —
Inselberg nach Hohenhagen = 43582,86 —

Den Halbmesser der Kugel auf welcher die Dreiecke liegen, kann man nach §. 243.

$$r = 3266400 \text{ Toisen}$$

setzen. Hierdurch werden die drei Seiten, in Bogensecunden ausgedrückt

$$i = 2241''93, \quad \log i = 3.3506225$$
$$h = 3433{,}59, \quad \log h = 3.5357481$$
$$b = 2752{,}15, \quad \log b = 3.4396715.$$

Nennt man die auf den Meridian reducirte Seite i, d. h. $B'H$, i', so wird (§. 532.)

$$i' = i.\ cos(N - \delta N)$$
$$\delta N = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{i}{r}\, tang\, p.\ sin\, N$$

wo man die Polhöhe

$$p = 51° 28' 31''38$$
$$N = 238.\ 9.\ 2{,}39$$

hat. Es wird daher

$$\log \frac{i}{r} = 3.3506225$$
$$tang\, p = 0.0990117$$
$$\sin N = 9.9291319\, n$$
$$C.\ \log 2 = 9.6989600$$
$$3.0777361\, n = \log \delta N$$
$$\delta N = -\ 1196''01 = -\ 19'\ 56''01$$
$$N - \delta N = 238° 28' 58''40$$
$$\log i = 4.5502668$$
$$cos(N - \delta N) = 9.7182967\, n$$
$$4.2685635\, n = \log i'$$
$$i' = -\ 18559{,}38 \text{ Toisen.}$$

Reducirt man dies auf Bogensecunden, so ergiebt sich $i' = 1171''98 = 19'\ 31''98$, und addirt man dies zur Polhöhe des Hohenhagen, so erhält man die

Polhöhe des Brockens $= 51° 48' 3''36 = p'$. Das Azimuth N' des Hohenhagen vom Brocken aus, findet sich dann durch die Formel

$$\sin N = \frac{\sin N . \cos p}{\cos p'},$$

wo N' immer um ungefähr 180° von N verschieden seyn muss. Man findet

$$N' = 58° 49' 17''35.$$

Addirt man zu den Azimuth des Brockens vom Hohenhagen aus gesehen, den Winkel BHI, so erhält man

238° 9′ 2″39
86. 13. 58,43
324. 23. 0,82,

welches das Azimuth des Inselberges ist. Dies giebt die auf den Meridian reducirte Seite HI oder b

$$HI' = 35553{,}94 \text{ Toisen}$$

also die ganze Länge $B'I' =$

$B'H = 18559{,}38$ Toisen
$HI' = 35553{,}94$ —
$B'I' = 54114{,}32$ Toisen.

Zieht man von dem Azimuth des Hohenhagen vom Brocken aus gesehen, den Winkel HBI ab, so bleibt das Azimuth des Inselberges vom Brocken aus

$$= 5° 42' 31''72$$

und hierdurch erhält man die auf den Meridian reducirte Seite BI,

$$BI = 54110{,}14 \text{ Toisen}$$

und wenn man aus beiden das Mittel nimmt

$$B'I' = 54111{,}73 \text{ Toisen}.$$

Auf diese Weise geht man immer von einem Dreieck zum andern fort, bis die ganze Reihe durch doppelte Rechnungen auf den Meridian reducirt ist, wo dann an den beiden Enden die Polhöhen genau gemessen werden um die Amplitude (§. 223.) des ganzen Bogens zu erhalten. Auch ist es vortheilhaft an einigen Zwischenpunkten das Azimuth und die Polhöhen wirklich zu messen, und nicht aus den geodätischen Messungen zu berechnen.

§. 536.

Hat man die Winkel des Dreiecks nicht auf einem Horizontalkreise gemessen, sondern mit einem Kreise, dessen Ebene durch die beiden andern Punkte des Dreiecks geht, so erfordert dieser Winkel eine Correction, die die Reduction auf den Horizont genannt wird. Hierzu ist es nöthig, dass man zugleich die Zenithdistanzen der beiden Punkte kennt. Es sey (fig. 25.) Z das Zenith des Beobachters, M und M' die Projectionen der beiden Punkte auf die Himmelskugel, ZM, ZM' ihre Zenithdistanzen, so ist MM' der gemessene Winkel, MZM' der auf den Horizont reducirte. Bezeichnet man die Zenithdistanzen durch $90-\zeta$, $90-\zeta'$, den gemessenen Winkel durch A, den reducirten durch A', so hat man im sphärischen Dreieck MZM'

$$\cos A = \sin\zeta.\sin\zeta' + \cos\zeta.\cos\zeta'\cos A'$$

also hieraus

$$\cos A' = \frac{\cos A}{\cos\zeta.\cos\zeta'} - \operatorname{tang}\zeta.\operatorname{tang}\zeta'.$$

Man sieht aus dieser Formel, dass wenn ζ und ζ' als unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung angesehen werden, die Differenz zwischen A und A' ein unendlich kleines der zweiten Ordnung seyn wird. Setzt man also, da die Zenithdistanzen immer nur wenig von 90° verschieden sind

$$A' = A + \delta A$$
$$\cos\zeta = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\zeta^2$$
$$\cos\zeta' = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\zeta'^2$$

so kommt, wenn man die Potenzen von δA vernachlässigt

$$\begin{aligned}\sin A'\,\delta A &= \operatorname{tg}\zeta.\operatorname{tg}\zeta' - \tfrac{1}{2}\cos A(\operatorname{tg}\zeta^2 + \operatorname{tg}\zeta'^2)\\ &= \operatorname{tg}\zeta.\operatorname{tg}\zeta'(1-\cos A) - \tfrac{1}{2}\cos A(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{tg}\zeta')^2\\ &= 2\operatorname{tg}\zeta.\operatorname{tg}\zeta'\sin\tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{2}\cos A\,\frac{\sin(\zeta-\zeta')^2}{\cos\zeta^2\cos\zeta'^2}\end{aligned}$$

folglich

$$\delta A = \operatorname{tang}\zeta.\operatorname{tang}\zeta'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\cot A.\,\frac{\sin(\zeta-\zeta')^2}{\cos\zeta^2\cos\zeta'^2}.$$

oder da man den Nenner $\cos\zeta^2\cos\zeta'^2 = 1$ setzen kann

$$\delta A = \operatorname{tang}\zeta.\operatorname{tang}\zeta'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\cot A\sin(\zeta-\zeta')^2.$$

Um δA in Secunden zu erhalten, multiplicirt man gleich jedes Glied mit der bekannten Zahl 206265. Es sey z. B. $\zeta = 1°$, $\zeta' = 1° 30'$, $A = 60°$, so kommt

tang ζ	= 8.24192	$sin(\zeta - \zeta')^2$	= 5.88168
tang ζ'	= 8.41807	*cot* A	= 9.76144
tang $\frac{1}{2} A$	= 9.76144	*C. log* 2	= 9.69897
log 206265	= 5.31443	*log* 206265	= 5.31443
	1.73586		0.65652
	54″43		4″53

also $\delta A = 54''43 - 4''53 = 49''90$, und der auf den Horizont reducirte Winkel

$= 60° 0' 49''90.$

§. 537.

Aus den gemessenen Zenithdistanzen kann man auch die Höhe des einen Winkelpunktes des Dreiecks über dem andern berechnen. Hierbei ist aber zu bemerken, dass wenn man einige Genauigkeit erlangen will, es durchaus nöthig ist, die Zenithdistanz von beiden Punkten aus zu messen, (obgleich theoretisch betrachtet, nur eine einzige erforderlich ist wenn man den Abstand der beiden Oerter von einander kennt) weil die Brechung des Lichtstrahls nahe an der Erde, oder die terrestrische Refraction gar zu veränderlich ist, als dass man sie mit Zuverlässigkeit aus den theoretisch berechneten Formeln entnehmen könnte. Es seyen (fig. 26.) A und B die beiden Beobachtungsörter, AA', BB' die in denselben errichteten Normalen, welche verlängert sich in C schneiden (da wir hierbei die Erde als eine Kugel betrachten können), die krumme Linie ADB bedeute den Weg des Lichtstrahls, $A''A$, $B''B$ seyen die Berührungslinien an ADB in den Endpunkten A und B, welche die gleichen Winkel $A''AB$, $B''BA$ mit der Linie AB bilden. Dann sind $A''AB$, $B''BA$ die Refractionen, welche wir durch ρ bezeichnen. Nennt man nun die gemessenen Zenithdistanzen $A'AA''$, $B'BB''$, $90 - \zeta$, $90 - \zeta'$, so sind die wahren Zenithdistanzen

$$A'AB = 90 - \zeta + \rho$$
$$B'BA = 90 - \zeta' + \rho$$

und wenn man den Winkel C am Mittelpunkte der Kugel durch α bezeichnet, so muss

$$(90 + \zeta - \rho) + (90 + \zeta' - \rho) + \alpha = 180°$$

seyn, weil $BAC + ABC + ACB = 180°$ ist. Diese Gleichung giebt

$$\rho = \frac{\zeta + \zeta' + \alpha}{2}$$

folglich wird

$$A'AB = 90 + \frac{\alpha + \zeta' - \zeta}{2}$$

$$B'BA = 90 + \frac{\alpha + \zeta - \zeta'}{2}.$$

Bezeichnet man nun die Höhen der Punkte A, B über der Erdoberfläche durch h, h', den Halbmesser der Erde durch r, die Entfernung AB durch a, so hat man im Dreieck ABC

$$a : \sin\alpha = r + h : \cos\frac{\alpha + \zeta - \zeta'}{2}$$

$$a : \sin\alpha = r + h' : \cos\frac{\alpha + \zeta' - \zeta}{2}.$$

und hieraus

$$h' - h = \frac{a}{\sin\alpha}\left[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \zeta' - \zeta) - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \zeta - \zeta')\right]$$

$$= \frac{2a\,\sin\frac{1}{2}(\zeta - \zeta')}{\sin\alpha}\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha = a.\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta'),$$

indem man $\cos\frac{1}{2}\alpha = 1$ setzt.

§. 538.

Wir haben nun noch zu zeigen, auf welche Weise das Azimuth gemessen werden kann, welches bei der Reduction der Dreiecksseiten auf den Meridian erforderlich ist. Kennt man die Lage der Mittagslinie an dem Beobachtungsorte, so braucht man nur vermittelst des Theodoliten den Horizontalwinkel zwischen dem Meridianzeichen und dem einen Dreieckspunkte zu messen, so wird sein Azimuth gefunden seyn. Ist aber die Lage der Mittagslinie unbekannt, so kann man den Horizontalwinkel zwischen dem Dreieckspunkte und der Sonne zu irgend einer

Zeit messen, und zugleich die Höhe der Sonne nehmen. Dann lässt sich das Azimuth der Sonne aus dieser Höhe, der Polhöhe des Ortes und der Declination der Sonne berechnen; das Azimuth der Sonne mit dem gemessenen Horizontalwinkel verglichen, giebt dann auch das Azimuth des Dreieckspunktes. Es sey z. B. (fig. 1.) *HZPR* der Meridian, *Z* das Zenith, *P* der Pol, in *S* die Sonne, in *D* der auf die Himmelskugel projicirte Dreieckspunkt, *HZD* das Azimuth desselben, *HZS* das Azimuth der Sonne, so ist *DZS* der gemessene Horizontalwinkel. Bezeichnet man dann die Höhe der Sonne durch h, die Polhöhe durch p, die Declination der Sonne durch δ, das Azimuth derselben durch A, so hat man im Dreieck *SZP*

$$\sin \delta = \sin p. \sin h - \cos p. \cos h. \cos A$$

und hieraus

$$\cos A = \frac{\sin p. \sin h - \sin \delta}{\cos p. \cos h},$$

wodurch das Azimuth der Sonne gefunden ist; zieht man dann hiervon den Horizontalwinkel ab, so bleibt das Azimuth des Objects *HZD*.

Druckfehler.

(sind berichtigt)

Seite	193.	Zeile	22	statt	19,21 u	liess	10,21 u
—	202.	—	24	—	3260920,3	—	3260869,6
—	364.	—	24	—	$\frac{42}{321}$	—	$\frac{42}{123}$
—	366.	—	4 v. u.	—	$\sin \varphi$	—	$\cos \varphi$.

Druck von Fried. Ernst Huth.

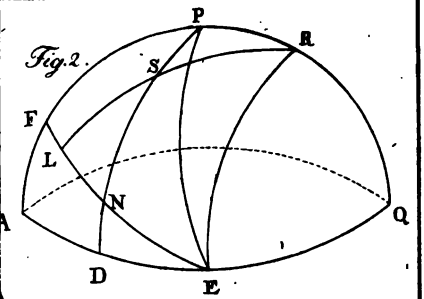


Fig. 2.
P
R
S
F
L
N
A
Q
D
E

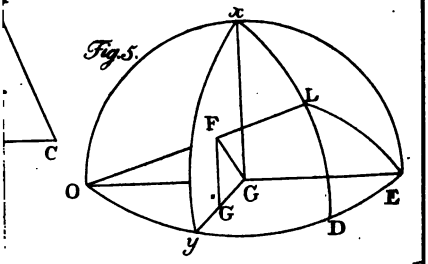
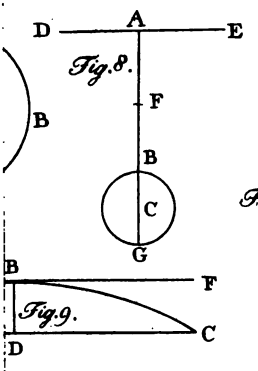
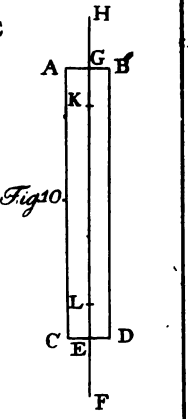
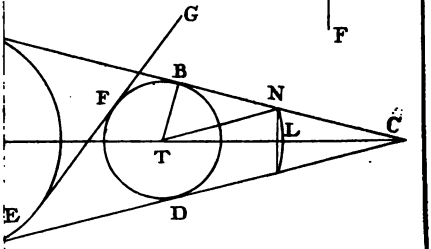


Fig. 5.
x
L
F
C
O
G
G
E
D
y


D
A
E
Fig. 8.
F
B
B
C
G
B
F
Fig. 9.
C
D


H
A
G
B
K
Fig. 10.
L
C
E
D
F


G
B
F
N
C
L
T
E
D

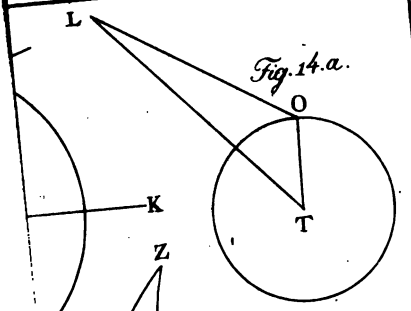


Fig. 14.a.

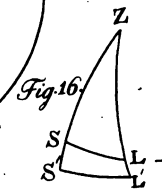


Fig. 16.

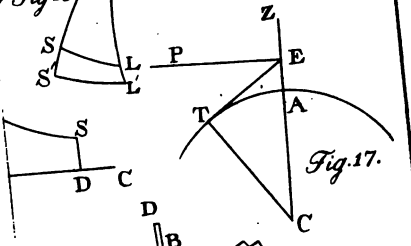


Fig. 17.

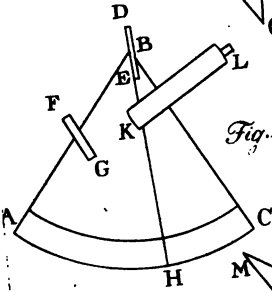
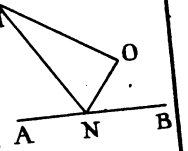


Fig. 19.



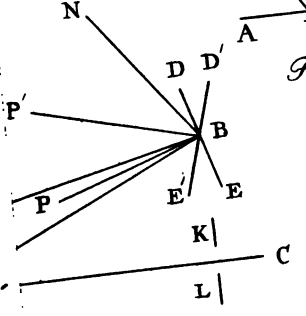


Fig. 21.

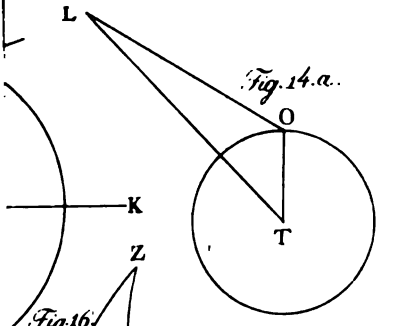


Fig. 14.a.

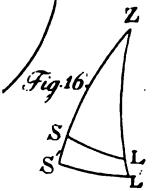
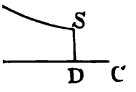


Fig. 16.



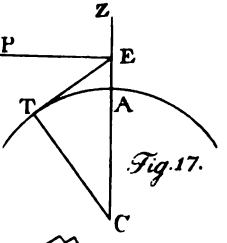


Fig. 17.

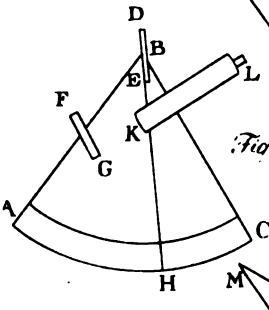
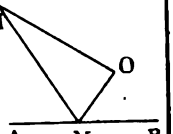


Fig. 19.



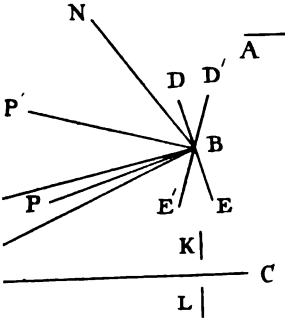


Fig. 21.

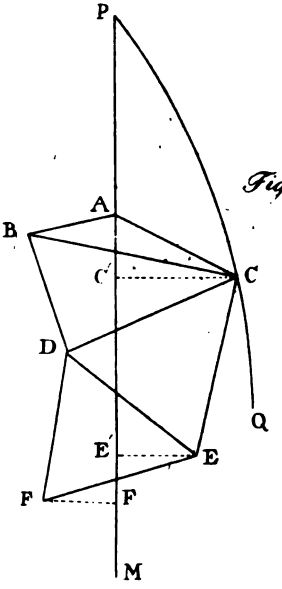


Fig. 23.

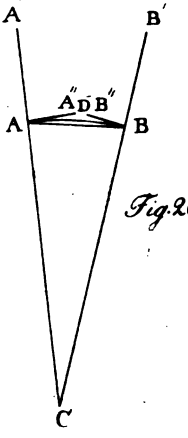


Fig. 26.

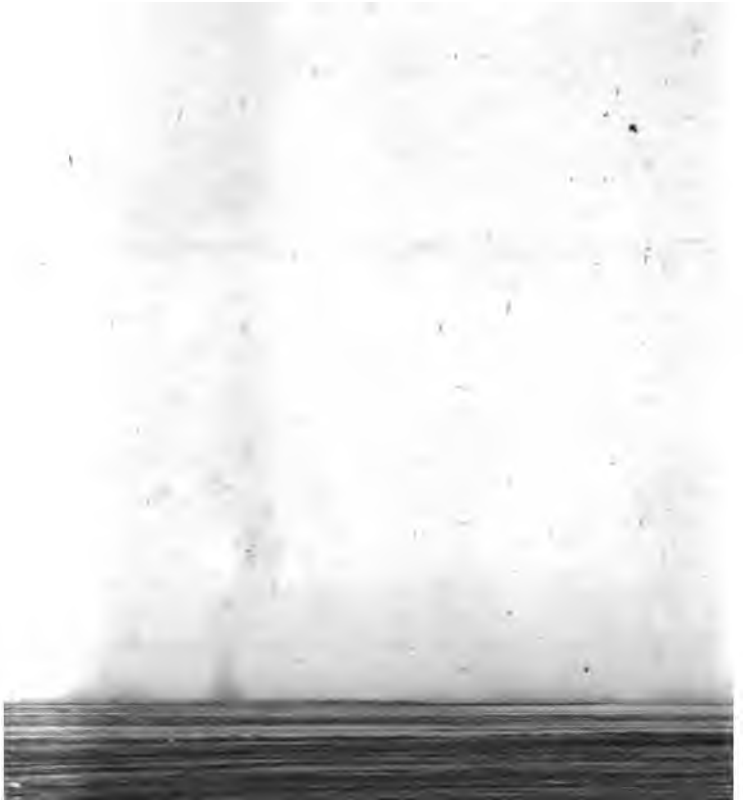
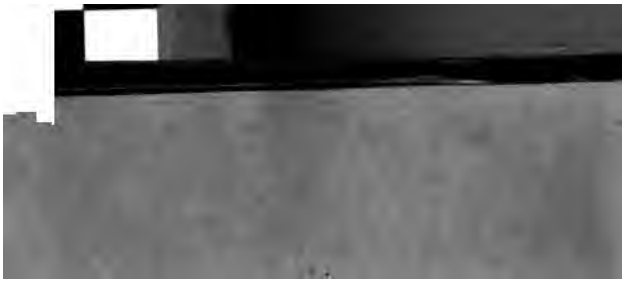



Fig. 25.